

$$R_n^k(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^n \left(1 - \frac{s}{n}\right)^k (a_s \cos(sx) + b_s \sin(sx)).$$

Таким образом, для второго модуля непрерывности справедлива следующая

**Теорема.** Для любого положительного числа  $A$  и натурального  $k$  имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f(x) - R_n^k(f, x)\|_C}{\omega_2\left(f, \frac{A}{\sqrt{n}}\right)} = 1 + \frac{k}{A^2} + o(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Для первого модуля непрерывности аналогичный результат был ранее получен А.И.Сюсюкаловым [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков А.В. О некоторых наилучших константах приближения непрерывных функций сингулярными интегралами // Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1983. С. 3-12.
2. Schurer F., Steutel F. On the Degree of Approximation by the Operators of de la Vallee – Poussin. –Monatsh.// Math. 1979. 87, №1. P.53-63
3. Сюсюкалов А.И. Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье и сопряженных рядов: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1991.

#### ON THE ORDER OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS USING SUMS OF RIESZ

**A. Baskakov, V. Prostokishin**

*National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)  
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia*

*Abstract.* Asymptotically exact constants in the estimates of the order of approximation of continuous periodic functions by operators of convolution type through the second modulus of continuity are found. This result is used to construct estimates of approximation of functions by the sums of Riesz.

*Key words:* Asymptotics, operators of convolution type, modulus of continuity, sums of Riesz.

УДК 517.5

#### О ФОРМИРОВАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

## С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Д.Е. Пелиновский<sup>1,2</sup>, А.Р. Гиниятуллин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский Государственный Технический Университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24

<sup>2</sup>Университет МакМастера  
Гамильтон, Онтарио, Канада

*Аннотация.* Рассматривается формирование особенностей в линейном уравнении адвекции-диффузии с переменной скоростью на полу-бесконечной линии. Переменная скорость определяется дополнительным условием на границе, которое моделирует динамику линии соприкосновения гидродинамического потока под углом  $180^\circ$ . Используя априорные оценки энергии, выведены условия на переменную скорость, которые гарантируют, что достаточно гладкое решение линейного уравнения адвекции-диффузии взрывается за конечное время. Используя класс самоподобных решений, найдена скорость роста решения вблизи особенности. Эта скорость не совпадает с полученными ранее численными решениями поставленной задачи.

*Ключевые слова:* уравнение адвекции-диффузии, переменная скорость, переопределённые граничные условия, формирование особенностей, априорные оценки энергии, самоподобные решения

### Введение

Контактные линии определяются пересечением твердой и свободной границ потока. Потоки с контактной линией с углом контакта  $180^\circ$  были рассмотрены в [2,6], где было показано, что соответствующие решения уравнений Навье-Стокса не имеют физического смысла. В последнее время другой подход, основанный на приближении смазки и уравнениях тонких пленок, был разработан в недавней работе [1].

Для очень простого гидродинамического потока, изображенного на рис. 1, авторами [1] получено нелинейное уравнение адвекции-диффузии для свободной границы потока:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{3} \left( \alpha^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + (1 - V(t))h \right] = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (1)$$

где  $\alpha$  числовая константа. Контактная линия зафиксирована при  $x = 0$  в системе координат, движущейся со скоростью  $-V(t)$  и определена граничными условиями  $h(0,t) = 1$  и  $h_x(0,t) = 0$ . Сохранение потока обеспечивает граничное условие для  $h_{xxx}(0,t) = -3/2\alpha^3$ . Пусть далее  $\alpha^3 = 3$ . Наличие слабого решения уравнения тонких пленок (1) для постоянной скорости  $V(t)$  и граничных условий Неймана на конечном интервале было недавно показано в работах [3,4].

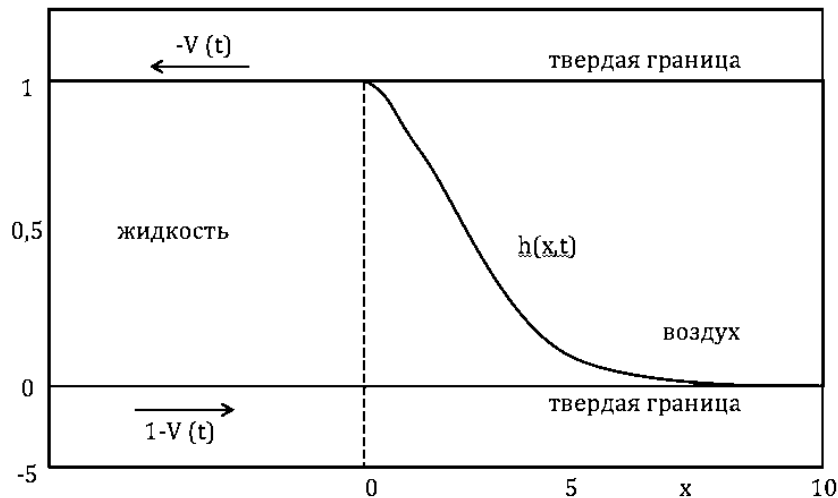


Рис. 1. Схематическая картина потока между твердых границ

Используя асимптотическую редукцию с

$$h-1 = O(|V|^{-1}), \quad x = O(|V|^{-1/3}), \quad t = O(|V|^{-4/3}), \quad \text{при } |V| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

авторы [1] свели нелинейное уравнение (1) при  $\alpha^3 = 3$  к линейному уравнению адвекции-диффузии:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = V(t) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

с граничными условиями вида

$$h(0,t) = 1, \quad h_x(0,t) = 0, \quad h_{xxx}(0,t) = -1/2, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Мы предполагаем, что  $h, h_x, h_{xx} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ : на самом деле, благодаря инвариантности линейного уравнения адвекции-диффузии (3) по отношению к сдвигу и масштабным преобразованиям на бесконечности допускается любое постоянное значение  $h$ . Действительно, если  $h(x,t)$  решает краевую задачу (3)-(4), то функция

$$\tilde{h}(x,t) = H + (1-H)h \left( \xi, \tau \right) = \frac{x}{(1-H)^{1/3}}, \quad \tau = \frac{t}{(1-H)^{4/3}} \quad (5)$$

с постоянной  $H < 1$ , решает то же уравнение (3) с теми же граничными условиями (4), переменной скоростью  $\tilde{V}(\tau) = V(\tau)/(1-H)$ , и асимптотикой  $h \rightarrow H$  при  $x \rightarrow \infty$ .

С тремя граничными условиями при  $x = 0$  и убыванием к нулю на бесконечности, задача Коши для уравнения (3) является переопределённой и третье (переопределяющее) граничное условие при  $x = 0$  используется для нахождения зависимости  $V$  от  $t$ . Локальное существование решений краевой задачи (3)-(4) было доказано в нашей работе [7] с использованием преобразования Лапласа по  $x$  и разложения в дробно-степенной ряд по  $t$ .

Рассмотрим, далее, эволюцию во времени краевой задачи (3)-(4) начиная с исходного значения  $h(x,0) = h_0(x)$  для соответствующей функции  $h_0$ . В частности, будем считать, что профиль  $h_0(x)$  монотонно убывает к нулю при  $x \rightarrow \infty$  и что  $x = 0$  является невырожденным максимумом  $h_0$  таким, что  $h_0(0) = 1$ ,  $h'_0(0) = 0$ , и  $h''_0(0) < 0$ . Если решение  $h(x,t)$  теряет монотонность по  $x$ , например, за счет величины

$$\beta(t) := h_{xx}(0,t) \tag{6}$$

пересекающей ноль с отрицательной стороны, то поток становится нефизическим и модель (4) является недействительной. Одновременно это может означать, что скорость  $V(t)$  растет так, как это определено для достаточно сильных решений уравнения адвекции-диффузии (3) точечным уравнением:

$$h_{xxxx}(0,t) = V(t)\beta(t), \tag{7}$$

которое получается при дифференцировании (3) по  $x$  и устремлении  $x \rightarrow 0$ .

Согласно результатам работы [1], основанным на численных расчетах уравнений (1) и (3), для любого подходящего  $h_0$ , существует конечный положительный момент времени  $t_0$  такой, что  $V(t) \rightarrow -\infty$  и  $\beta(t) \rightarrow 0^-$  при  $t \uparrow t_0$ . Более того, в [1] утверждается, что  $V(t)$  ведет себя вблизи  $t_0$  как логарифмическая функция от  $t$ , т.е.

$$V(t) \sim C_1 \log(t_0 - t) + C_2, \text{ при } t \uparrow t_0, \tag{8}$$

где  $C_1, C_2$  положительные константы.

Целью данной работы является проверка возможной скорости роста решения вблизи особенности краевой задачи (3)-(4).

Во-первых, мы будем использовать априорные энергетические оценки для того, чтобы показать, что для гладких решений краевой задачи (3)-(4) функция  $V(t)$  не может оставаться все время положительной. Этот результат одновременно означает две вещи: если  $V(t)$  остается положительной, то гладкое решение разрушается за ограниченное время, и если гладкое решение всегда существует, то  $V(t)$  либо колеблется, либо становится отрицательной. Также, мы покажем, что по той же причине функции  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  не могут оставаться всегда отрицательными: если  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  остаются отрицательными, то гладкое решение разрушается за ограниченное время, и если гладкое решение всегда существует, то  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  либо колеблются, либо становятся положительными. Сочетание обоих результатов показывает, что гладкое решение может всегда существовать, только при условии, что переменная скорость  $V(t)$  колеблется от положительных значений к отрицательным, и обратно.

Во-вторых, мы рассмотрим класс самоподобных решений, основанных на масштабных преобразованиях (2). Класс самоподобных решений определяется линейным

уравнением адвекции-диффузии (3), с убыванием к нулю на бесконечности, и с первыми двумя граничными условиями (4). Третье граничное условие  $h_{xxx}(0,t) = -1/2$  для самоподобных решений не выполняется, и мы заменяем его новым условием вида  $h_{xxx}(0,t) = \gamma_0 V(t)$  при фиксированном  $\gamma_0 < 0$ . Мы покажем, что самоподобное решение взрывается за конечное время при положительном  $V(t)$  и положительном  $\beta(t)$ , что согласуется с масштабным преобразованием (2), но не соответствует физическим требованиям потока на рис. 1.

Наконец, используя точечное уравнение (7) и его производную, мы покажем как в течение конечного времени  $\beta(t)$  может обратиться в ноль, а  $V(t)$  – стать бесконечной. При этом рост решения вблизи особенностей опять отличается от показателя, основанного на масштабном преобразовании (2) и на численно полученных результатах (8). Таким образом, дальнейшие исследования краевой задачи (3)-(4), в том числе более точное численное моделирование требуется для лучшего понимания динамики формирования особенностей в поставленной задаче.

#### Априорные оценки энергии

Рассмотрим уравнение адвекции-диффузии (3) с граничными условиями (4) и убыванием  $h$ ,  $h_x$ ,  $h_{xx}$  к нулю на бесконечности. Мы будем предполагать существование гладкого решения краевой задачи и покажем, что функция  $V(t)$  не может оставаться положительной всё время.

**Теорема 1.** Решения краевой задачи (3)-(4) не существует в классе функций  $h \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$  если  $V(t) \geq V_0 > -1$  для всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Из уравнения адвекции-диффузии (3), получаем баланс энергии:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} h^2 \right) + \partial_x \left( h h_{xxx} - h_x h_{xx} - \frac{1}{2} V(t) h^2 \right) + (h_{xx})^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (4) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|h(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|h_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = -(1 + V(t)). \quad (9)$$

Если у нас есть решение в классе  $h \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (9), мы получим

$$\|h(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|h_{xx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|h_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t (1 + V(\tau)) d\tau. \quad (10)$$

Поскольку левая часть строго положительная, то Теорема 1 доказана.

Далее, перепишем уравнение адвекции-диффузии (3) для переменной  $u = h_x$  в виде:

$$u_t + u_{xxxx} = V(t)u_x, \quad x > 0, t > 0, \quad (11)$$

с граничными условиями на контактной линии:

$$u(0,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = -1/2, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

где граничное условие  $u_{xxx}(0,t) = h_{xxx}(0,t) = 0$  следует из граничных условий  $h(0,t) = 1$  и  $h_x(0,t) = 0$ , а также из уравнения адвекции-диффузии (3) при  $x \rightarrow 0$ . Пусть  $\beta(t)$  задано уравнением (6) и учтем, что изначально  $\beta(0) < 0$ . Опять же, мы будем предполагать существование гладкого решения краевой задачи (11)-(12) и покажем, что функции  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  не могут оставаться отрицательными все время.

**Теорема 2.** Решения краевой задачи (11)-(12) не существует в классе функций  $u \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$  если  $\beta(t) \leq \beta_0 < 0$  для всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Из уравнения адвекции-диффузии (11), получаем баланс энергии:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \partial_x \left( uu_{xxx} - u_x u_{xx} - \frac{1}{2} V(t) u^2 \right) + (u_{xx})^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (12) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = \beta(t). \quad (13)$$

Если у нас есть решение в классе  $u \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (13), мы получим

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|u_{xx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t \beta(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Поскольку левая часть строго положительная, то Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Решение краевой задачи (11)-(12) не существует в классе функций  $u \in C(R_+, H^1(R_+)) \cap L^2(R_+, H^3(R_+))$  если  $V(t) \leq V_0 < 0$  и  $|\beta(t)| \geq \beta_0 > 0$  при всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Умножая уравнение адвекции-диффузии (11) на  $u_{xxx}$ , интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (12) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = V(t) \beta^2(t). \quad (15)$$

Если у нас есть решение в классе  $u \in C(R_+, H^1(R_+)) \cap L^2(R_+, H^3(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (15), получаем

$$\|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int \|u_{xxx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|u'_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int V(\tau)\beta^2(\tau)d\tau. \quad (16)$$

Так как левая часть строго положительная, то Теорема 3 доказана.

### Самоподобные решения для формирования особенностей

Рассмотрим класс самоподобных решений уравнения (3):

$$V(t) = \frac{t_0 V_0}{(t_0 - t)^{3/4}}, \quad h(x, t) = f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(t_0 - t)^{1/4}}, \quad (17)$$

где  $t_0$  произвольный положительный параметр для конечного времени разрушения,  $V_0$  произвольный параметр начальной скорости, и  $f(\xi)$  решение дифференциального уравнения:

$$\frac{d^4 f}{d\xi^4} + \frac{1}{4}(\xi - 4t_0 V_0) \frac{df}{d\xi} = 0, \quad \xi > 0. \quad (18)$$

Рассмотрим решение краевой задачи, связанное с первыми двумя граничными условиями на контактной линии:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad (19)$$

и убыванием  $f(\xi)$ ,  $f'(\xi)$  к нулю на бесконечности. Отметим, что третье условие на контактной линии  $h_{xxx}(0, t) = -1/2$  не выполняется для самоподобного решения (17). Новое третье граничное условие задается выражением

$$h_{xxx}(0, t) = \frac{f'''(0)}{(t_0 - t)^{3/4}} = \gamma_0 V(t), \quad (20)$$

где  $\gamma_0$  константа такая, что  $f'''(0) = t_0 V_0 \gamma_0$ . Также отметим, что класс самоподобных решений (17) совместим с асимптотическим масштабированием (2) использованным при выводе линейного уравнения адвекции-диффузии (3).

Пусть

$$g(z) = f'(\xi), \quad z = \xi - 4t_0 V_0,$$

тогда краевая задача (18)-(19) сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} 4g'''(z) + zg(z) = 0, & z > z_0 \\ g(z_0) = 0, \\ g(z), g'(z) \rightarrow 0 & \text{при } z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (21)$$

где  $z_0 = -4t_0 V_0$ . Подходящее решение данной краевой задачи строится в соответствии со следующей теоремой.

**Теорема 4.** Существует единственное (с точностью до скалярного умножения) положительное решение краевой задачи (21) на  $(z_0, \infty)$  при  $z_0 < 0$ .

**Доказательство.** При  $z \rightarrow \infty$ , существуют три фундаментальных решения линейного уравнения

$$4g'''(z) + zg(z) = 0. \quad (22)$$

Одно решение монотонно стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , а два других решения колеблются и расходятся при  $z \rightarrow \infty$ . Таким образом, пространство решений краевой задачи (21) образовано частным решением (обозначим его  $G$ ) стремящимся к нулю на бесконечности. Чтобы определить  $G$  однозначно, построим затухающие решения дифференциального уравнения (22) асимптотически, используя анализ ВКБ [5]:

$$G(z) = \exp\left(\frac{-3z^{4/3}}{2^{8/3}}\right) \left[ \frac{1}{z^{1/3}} + O\left(\frac{1}{z^{2/3}}\right) \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (23)$$

где поправочные слагаемые могут быть определены в слагаемых степенного ряда по обратным степеням  $z^{1/3}$ . Решение  $G$  линейного уравнения (22) может быть глобально расширено для всех  $z \in \mathbb{R}$ . Чтобы удовлетворить граничному условию при  $z_0$ , нужно показать, что существует  $z_0 \in \mathbb{R}$  такое, что  $G(z_0) = 0$ .

Очевидно, что  $z_0 \in \mathbb{R}$  существует. Действительно, если бы  $z_0$  не существовало, то  $G(z)$  оставалось бы положительным для всех  $z \in \mathbb{R}$ , что возможно только в том случае, если бы  $G(z)$  монотонно убывало до 0 при  $z \rightarrow -\infty$  (остальные два решения опять колеблются и расходятся при  $z \rightarrow -\infty$ ). Однако, тогда  $G \in H^2(\mathbb{R})$  являлось бы глобальным решением дифференциального уравнения (22) для всех  $z \in \mathbb{R}$ . Умножая это уравнение на  $G'$  и интегрируя по частям, получаем противоречие

$$4 \int_{\mathbb{R}} (G'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} G^2 dz = 0, \quad (24)$$

которое доказывает, что  $G \in H^2(\mathbb{R})$  не может существовать. Кроме того,  $z_0 < 0$  потому что  $G(z)$  монотонно убывает для всех  $z > 0$ . Чтобы убедиться в этом, используем тот факт, что дифференциальное уравнение (22) инвариантно относительно преобразования  $z \mapsto -z$ , так что  $\tilde{G}(z) := G(-z)$  удовлетворяет тому же уравнению (22). Функция  $\tilde{G}(z)$  монотонно возрастает при больших отрицательных  $z$ . Так как  $4\tilde{G}'''(z) = -z\tilde{G}(z) > 0$  для всех  $z < 0$ , то  $\tilde{G}(z)$  остается монотонно возрастающей при всех  $z \leq 0$  и, следовательно,  $G(z)$  монотонно убывает для всех  $z \geq 0$ . Таким образом,  $z_0 < 0$ , то есть,  $V_0 > 0$  (если  $t_0 > 0$ ). Значение  $z_0$  однозначно определяется как наибольший отрицательный ноль положительной функции  $G(z)$ . Теорема 4 доказана.

На рис. 2 показано численное приближение решения  $G(z)$  удовлетворяющее граничным условиям задачи (21). Численная аппроксимация получена с использованием стандартного метода Гойна.



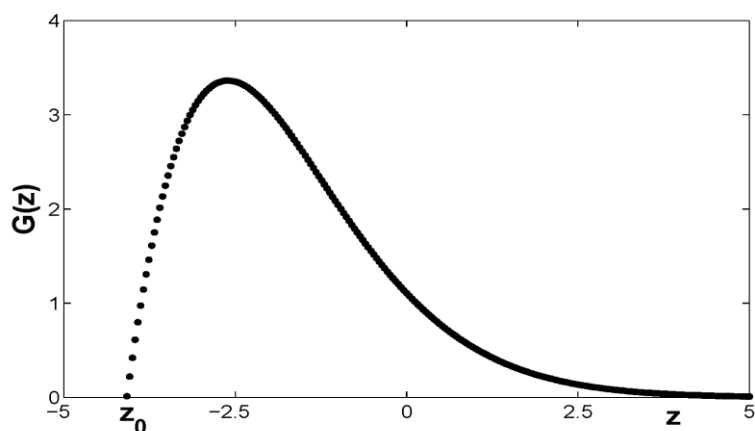


Рис. 2. Численная аппроксимация решения  $G(z)$  краевой задачи (21)

Общее решение краевой задачи (21) имеет вид  $g(z) = CG(z)$ . Для определения константы  $C$ , используем модифицированные граничные условия (20). Если  $h_{xxx}(0,t) < 0$  как следует из третьего граничного условия в (4), то мы имеем  $g''(0) = f'''(0) < 0$  или  $CG''(z_0) < 0$ . Далее мы покажем, что  $G''(z_0) < 0$  и, следовательно,  $C > 0$ . Действительно,  $\tilde{G}(z) := G(-z)$  монотонно возрастает для всех  $z \leq 0$  и  $4\tilde{G}'''(z) = -z\tilde{G}''(z) > 0$ . Если  $z > 0$ ,  $\tilde{G}'''(z) < 0$  при условии, что  $\tilde{G}''(z) > 0$ , то существует  $\tilde{z}_0 \in (0, z_0)$ , такое, что  $\tilde{G}''(z) < 0$  для всех  $z \in (-\tilde{z}_0, -z_0]$ , или, эквивалентно,  $G''(z) < 0$  для всех  $z \in [z_0, \tilde{z}_0)$ . Таким образом,  $G''(z_0) < 0$  как это показано на рис. 2.

По той же причине, существует  $\tilde{\tilde{z}}_0 \in (\tilde{z}_0, z_0]$  такое, что  $\tilde{G}'(z) < 0$  для всех  $z \in (\tilde{\tilde{z}}_0, -z_0]$ , или, эквивалентно,  $G'(z) > 0$  for all  $z \in [z_0, \tilde{\tilde{z}}_0)$ . Таким образом,  $G'(z_0) > 0$ , как это показано на рис. 2, следовательно

$$\beta(t) = \frac{f''(0)}{(t_0 - t)^{1/2}} = \frac{CG'(z_0)}{(t_0 - t)^{1/2}} > 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Таким образом, класс самоподобных решений (17) не удовлетворяет физическим требованиям потока (рис. 1), потому что  $\beta(t)$  должно быть отрицательным по крайней мере для начальных значений  $t \geq 0$ .

### Точечные уравнения

Мы приведем здесь дополнительные оценки того, как решение краевой задачи (3)-(4) может неограниченно расти за конечное время, на основе точечного уравнения (7) и его производной. Рассмотрим краевую задачу (11)-(12) и предположим, что существует

достаточно гладкое решение. Переходя к пределу  $x \rightarrow 0$ , мы вернемся к точечному уравнению (7) переписанному в новых переменных в виде:

$$u_{xxxx}(0,t) = V(t) \beta(t), \quad t \geq 0, \quad (25)$$

где  $\beta(t) = u_x(0,t)$ .

Взяв производную от линейного уравнения адвекции-диффузии (11) по  $x$  и предел  $x \rightarrow 0$ , мы получим другое точечное уравнение:

$$\frac{d\beta}{dt} + u_{xxxx}(0,t) = -\frac{1}{2}V(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Система уравнений (25) и (26) может быть переписана в частично замкнутом виде:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{u_{xxx}(0,t)}{2\beta(t)} - u_{xxxx}(0,t), \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Предположим теперь, что существует  $t_0 > 0$  такое, что

$$\beta(t) \rightarrow 0, \quad u_{xxx}(0,t) \rightarrow a_4, \quad u_{xxxx}(0,t) \rightarrow a_5, \quad \text{при } t \uparrow t_0, \quad (28)$$

где  $0 < |a_4| < \infty$  и  $|a_5| < \infty$ . Тогда, асимптотический анализ уравнения (27) показывает, что

$$\beta^2(t) = a_4(t_0 - t) + O(t_0 - t)^{3/2}, \quad V(t) = \sqrt{\frac{a_4}{t_0 - t}} + O(1), \quad \text{при } t \uparrow t_0, \quad (29)$$

при условии, что  $a_4 > 0$ . Скорость роста решения вблизи особенности в (29) отличается от скорости роста самоподобного решения (17) и численно полученного результата (8). В рамках численного результата (8), этот точечный анализ может означать, что либо  $a_4 = 0$  либо  $a_5 \rightarrow \infty$  в предположении (28).

Таким образом, три различных скорости роста решения вблизи особенности, утверждаемые в (8) и полученные в (17) и (29) показывают сложность динамики краевой задачи (3)-(4) или же ее эквивалентной версии (11)-(12). Таким образом, необходимы дальнейшие исследования поставленной задачи, в том числе более точное численное моделирование.

**Благодарность:** Авторы выражают благодарность Евгению Бенилову и Роману Таранцу за полезные обсуждения и доступ к их неопубликованным результатам на ранних этапах исследований. Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benilov E.S. and Vynnycky M. "Contact lines with a  $180^\circ$  contact angle", submitted to J. Fluid Mech. (2012)
2. Benney D.J. and Timson W.J. "The rolling motion of a viscous fluid on and off a rigid surface", Stud. Appl. Math. **63** (1980), 93-98.
3. Chugunova, M. Pugh, and R. Taranets, "Nonnegative solutions for a long-wave unstable thin film equation with convection", SIAM J. Math. Anal. **42**, 1826-1853 (2010).
4. Chugunova M. and Taranets R. "Qualitative analysis of coating flows on a rotating horizontal cylinder", Int. J. Diff. Eqs. **2012** (2012), Article ID 570283, 30 pages.
5. Murdock J.A., *Perturbations: Theory and Methods* (SIAM, Philadelphia, 1987).
6. Ngan C.G. and Dussan V.E.B., "The moving contact line with a  $180^\circ$  advancing contact angle", Phys. Fluids **24** (1984), 2785-2787.
7. Pelinovsky D.E., Giniyatullin A.R., and Panfilova Y.A.. "On solutions of a reduced model for the dynamical evolution of contact lines" // Труды НГТУ. 2012. № 4(97).

**ON THE FORMATION OF SINGULARITIES  
IN THE LINEAR ADVECTION-DIFFUSION EQUATION  
WITH A REDEFINITION OF THE BOUNDARY CONDITION**

**D. Pelinovsky<sup>1,2</sup>, A. Giniyatullin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Alexeev Nizhny Novgorod State Technical University  
24, Minin Street, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

<sup>2</sup>McMaster University  
Hamilton, Ontario, Canada

*Abstract.* We study finite-time singularities in the linear advection–diffusion equation with a variable speed on a semi-infinite line. The variable speed is determined by an additional condition at the boundary, which models the dynamics of a contact line of a hydrodynamic flow at a  $180^\circ$  contact angle. Using apriori energy estimates, we derive conditions on variable speed that guarantee that a sufficiently smooth solution of the linear advection–diffusion equation blows up in a finite time. Using the class of self-similar solutions to the linear advection–diffusion equation, we find the blow-up rate of singularity formation. This blow-up rate does not agree with previous numerical simulations of the model problem.

*Key words:* advection-diffusion equation, variable speed, determined boundary conditions, the formation of singularities, apriori energy estimates, self-similar solutions.