**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 179, № 1
апрель, 2014**

Д. Е. Пелиновский*†, Е. А. Рувинская†, О. Е. Куркина†‡, Б. Деконинк§

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ СОЛИТОНОВ В ДВУМЕРНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

Доказано, что плоские солитоны в двумерном гиперболическом нелинейном уравнении Шредингера неустойчивы по отношению к поперечным возмущениям с произвольно малыми периодами, т. е. коротким волнам. Анализ основан на построении функций Йоста для непрерывного спектра операторов Шредингера, условиях излучения Зоммерфельда и разложении Ляпунова–Шмидта. Точные асимптотические выражения для скорости развития неустойчивости получены в пределе коротких периодов.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, солитоны, поперечная неустойчивость, метод редукции Ляпунова–Шмидта, золотое правило Ферми.

DOI: 10.4231/tmf8568

1. ВВЕДЕНИЕ

Поперечные неустойчивости солитонов изучались для многих нелинейных эволюционных уравнений (см. пионерскую работу [1] и обзорную статью [2]). В частности, эта проблема исследовалась в контексте гиперболического нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$i\psi_t + \psi_{xx} - \psi_{yy} + 2|\psi|^2\psi = 0, \tag{1}$$

которое моделирует пакеты океанских волн в глубокой воде. Уединенные волны одномерного (не зависящего от y) НУШ существуют в виде аналитических решений.

*Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada. E-mail: dmpeli@math.mcmaster.ca

†Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия

‡Высшая школа экономики – Национальный исследовательский университет в Нижнем Новгороде, Нижний Новгород, Россия

§Department of Applied Mathematics, University of Washington, Seattle, WA, USA

Если убрать все параметры уединенной волны, используя трансляционную и скейлинговую инвариантности, то можно рассмотреть одномерную уединенную волну с тривиальной фазой, имеющую простой вид $\psi = e^{it}\operatorname{sech}(x)$. Добавляя к одномерной уединенной волне малое возмущение $e^{i\rho y+\lambda t+it}(U(x)+iV(x))$ и линеаризуя соответствующие уравнения (см. нашу предыдущую работу [3]), мы получаем спектральную задачу в виде двух связанных уравнений

$$(L_+ - \rho^2)U = -\lambda V, \qquad (L_- - \rho^2)V = \lambda U, \tag{2}$$

где λ – спектральный параметр, ρ – поперечное волновое число малого возмущения, а $L_\pm$ – операторы Шредингера:

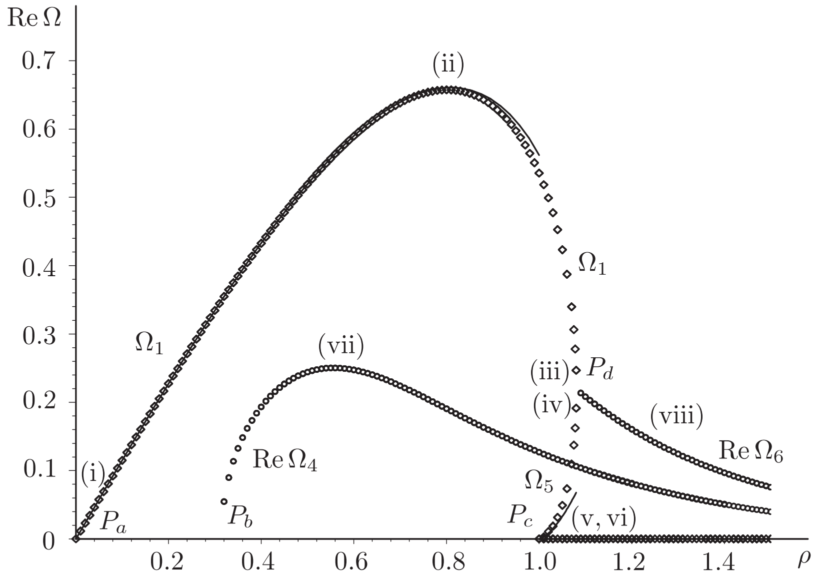
$$L_+ = -\partial_x^2 + 1 - 6\operatorname{sech}^2(x), \qquad L_- = -\partial_x^2 + 1 - 2\operatorname{sech}^2(x).$$

Заметим, что малые значения ρ соответствуют длинноволновым возмущениям в поперечных направлениях, тогда как большие значения ρ соответствуют коротковолновым поперечным возмущениям.

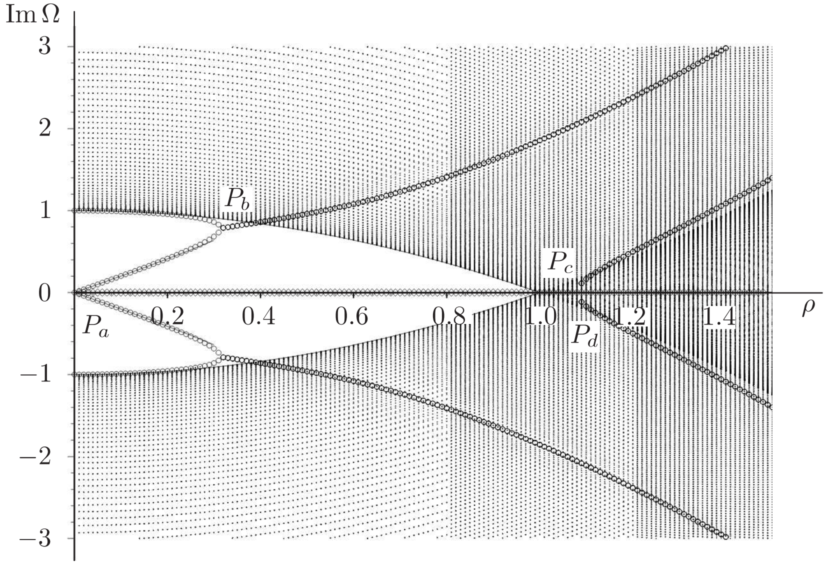
Численные приближения неустойчивых собственных значений (с положительной вещественной частью) для спектральной задачи (2) были получены в нашей предыдущей работе [3] и недавно воспроизведены в работах [4] (см. рис. 5.27) и [5] (см. рис. 2) с помощью независимых численных расчетов. В настоящей статье мы воспроизводим рис. 2 из работы [3] (см. рис 1). На этом рисунке показаны различные бифуркации, а также поведение собственных значений и непрерывного спектра для спектральной задачи (2) в зависимости от поперечного волнового числа ρ.

Асимптотические разложения, свидетельствующие о наличии вещественного неустойчивого собственного значения с бифуркацией в точке P_a при малых значениях ρ были приведены в пионерской работе [1]. Гамильтонова бифуркация Хопфа комплексного квартета в точке P_b при $\rho \approx 0.31$ была объяснена в работе [3] на основании теории отрицательных индексов. В работе [3] с помощью метода функции Эванса было также доказано наличие бифуркации нового неустойчивого вещественного собственного значения в точке P_c при $\rho > 1$. Для полного понимания картины неустойчивостей, показанной на рис. 1, не хватает соображений, которые свидетельствовали бы о существовании неустойчивых собственных значений для произвольно больших значений ρ. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Доказательство существования неустойчивых собственных значений при больших значениях ρ важно для различных физических экспериментов (как старых, так и новых). Еще в работе [6] было предсказано, что в пределе больших ρ неустойчивостей нет, основанием для такого предсказания послужили эксперименты Хаммака в Университете Флориды с волнами на воде, выполненные в 1979 г.; оказалось, что результаты этих экспериментов хорошо согласуются с динамикой одномерного НУШ. Далее, поперечные неустойчивости наблюдались экспериментально с помощью четырехволновых взаимодействий в контексте нелинейной лазерной оптики. Авторы работы [7] наблюдали первичную змеевидную неустойчивость солитонов в точке P_a при малых значениях ρ, а также сохранение неустойчивостей при больших значениях ρ. В недавней работе [8] было экспериментально показано наличие вторичной неустойчивости с бифуркацией в точке P_b вблизи значения $\rho \approx 0.31$.



а



б

Рис. 1. Результаты численных расчетов вещественных (а) и мнимых (б) частей изолированных собственных значений и точек непрерывного спектра для спектральной задачи (2) в зависимости от поперечного волнового числа ρ. Рисунок взят из работы [3].

В другом физическом контексте – для уединенных волн в PT-симметричных волноводах – результаты по поперечной неустойчивости солитонов были получены заново в работе [5] (авторы этой работы не заметили, что математическая задача, которую они решали, тождественна задаче о поперечной неустойчивости солитонных решений гиперболического НУШ). В приложении Б к работе [5] приведены асимптотические результаты, согласно которым если в пределе больших ρ имеются неустойчивые собственные значения спектральной задачи (2), то скорость роста неустойчивости будет экспоненциально малой в терминах большого параметра ρ. Как было заявлено в работе [5], нет никаких подтверждений тому факту, что эти собственные значения имеют ненулевую скорость роста неустойчивости.

И наконец, аналогичные неустойчивости солитонных решений гиперболического НУШ (1) были получены численно в контексте дискретного НУШ вдали от антиконтинуального предела [9].

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 приведены основные результаты. В разделе 3 дано аналитическое доказательство основной теоремы. Раздел 4 посвящен выводу асимптотической формулы для неустойчивых собственных значений спектральной задачи (2) в пределе больших значений ρ. В разделе 5 мы суммируем полученные результаты и обсуждаем дальнейшие задачи, которые предстоит решить в будущем.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для исследования поперечной неустойчивости солитонов в пределе больших ρ представим спектральную задачу (2) в квазиклассическом виде, используя преобразование

$$\rho^2 = 1 + \frac{1}{\epsilon^2}, \qquad \lambda = \frac{i\omega}{\epsilon^2},$$

где ϵ – малый параметр. Тогда спектральную задачу (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\big(-\epsilon^2\partial_x^2 - 1 - 6\epsilon^2 \operatorname{sech}^2(x)\big)U = -i\omega V, \\ &\big(-\epsilon^2\partial_x^2 - 1 - 2\epsilon^2 \operatorname{sech}^2(x)\big)V = i\omega U. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что мы уделяем особое внимание спектру данной задачи при $\epsilon \to 0$, что соответствует $\rho \to \infty$ в исходной задаче. Кроме того, вещественная часть величины λ, которая определяет скорость роста неустойчивости, соответствует с точностью до множителя ϵ^2 мнимой части величины ω.

Теперь введем новые зависимые переменные $\varphi = U + iV$ и $\psi = U - iV$, которые больше подходят для работы с непрерывным спектром при вещественных значениях ω. Заметим, что φ и ψ, вообще говоря, не являются комплексно-сопряженными друг к другу, поскольку U и V могут принимать комплексные значения, так как спектральная задача (3) не является самосопряженной. Перепишем спектральную задачу (3) в виде

$$\begin{aligned} &\big(-\epsilon^2\partial_x^2 + \omega - 1 - 4\epsilon^2 \operatorname{sech}^2(x)\big)\varphi - 2\epsilon^2 \operatorname{sech}^2(x)\psi = 0, \\ &\big(-\epsilon^2\partial_x^2 - \omega - 1 - 4\epsilon^2 \operatorname{sech}^2(x)\big)\psi - 2\epsilon^2 \operatorname{sech}^2(x)\varphi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Оператор Шредингера

$$L_0 = -\partial_x^2 - 4\operatorname{sech}^2(x) \tag{5}$$

имеет дискретный спектр, состоящий в точности из двух собственных значений, которые расположены в точках $-E_0$ и $-E_1$ [10], где

$$E_0 = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2, \qquad E_1 = \left(\frac{\sqrt{17}-3}{2} \right)^2. \tag{6}$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\varphi_0 = \operatorname{sech}^{\sqrt{E_0}}(x), \qquad \varphi_1 = \operatorname{th}(x) \operatorname{sech}^{\sqrt{E_1}}(x). \tag{7}$$

В окрестности каждого из этих собственных значений можно построить разложение по теории возмущений для пары экспоненциально убывающих собственных функций (φ, ψ) и квартета комплексных собственных значений ω исходной спектральной задачи (4). Эта идея уже появлялась в приложении Б к работе [5], где разложения по теории возмущений проведены формально по степеням ϵ.

Заметим, что разложение по теории возмущений в спектральной задаче (4) не является стандартным применением метода редукции Ляпунова–Шмидта [11], поскольку собственные значения предельной задачи, задаваемой оператором L_0, лежат на ветви непрерывного спектра. Поэтому, чтобы обосновать разложения по теории возмущений и получить основной результат, нам нужно воспользоваться теорией возмущений, в том числе золотым правилом Ферми [12]. В альтернативном варианте такой теории возмущений можно использовать аналитическое продолжение функции Эванса через непрерывный спектр аналогично тому, как это было сделано в работе [3]. Кроме того, можно вспомнить о таком квазиклассическом методе, как теория ВКБ, которую также можно было бы применить для исследования нашей задачи [13].

Сформулируем основные результаты настоящей работы. Будем писать $|a| \lesssim \epsilon$, если при достаточно малых положительных значениях ϵ найдется не зависящая от ϵ положительная постоянная C такая, что $|a| \leqslant C\epsilon$. Через $H^2(\mathbb{R})$ обозначим стандартное соболевское пространство обобщенных функций, производные которых вплоть до второго порядка квадратично интегрируемы.

Теорема 1. *Для спектральной задачи* (4) *при достаточно малых* $\epsilon > 0$ *существуют два квартета комплексных собственных значений* $\{\omega, \bar{\omega}, -\omega, -\bar{\omega}\}$, *каждый из которых отвечает одному из собственных векторов* $\varphi, \psi \in H^2(\mathbb{R})$.

Пусть $-E_0$ *и* φ_0 *– соответствующие друг другу собственное значение и собственный вектор оператора* L_0 *из* (5). *Существует такое* $\epsilon_0 > 0$, *что для всех* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ *комплексное собственное значение* ω *задачи* (4), *лежащее в первом квадранте комплексной плоскости, и соответствующая ему собственная функция удовлетворяют условиям*

$$|\omega - 1 - \epsilon^2 E_0| \lesssim \epsilon^3, \qquad \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2} \lesssim \epsilon, \qquad \|\psi\|_{L^\infty} \lesssim \epsilon, \tag{8}$$

при этом значение $\operatorname{Im}\omega > 0$ *экспоненциально мало по отношению к* ϵ.

Предложение 1. *Кроме двух квартетов комплексных собственных значений из теоремы* 1, *не существует других собственных значений в спектральной задаче* (4) *при достаточных малых* $\epsilon > 0$.

Предложение 2. *Скорость роста неустойчивости для двух комплексных квартетов собственных значений из теоремы* 1 *при* $\epsilon \to 0$ *задается следующими явными формулами*:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda &= \frac{\operatorname{Im}\omega}{\epsilon^2} \sim \frac{2^{p+3/2}\pi^2}{\Gamma^2(p)}\,\epsilon^{3-2p}e^{-\sqrt{2}\pi/\epsilon}, \\ \operatorname{Re}\lambda &= \frac{\operatorname{Im}\omega}{\epsilon^2} \sim \frac{2^{q+5/2}\pi^2}{q^2\Gamma^2(q)}\,\epsilon^{1-2q}e^{-\sqrt{2}\pi/\epsilon}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $p = 2 + \sqrt{E_0}$ *и* $q = 2 + \sqrt{E_1}$.

Заметим, что результат теоремы 1 гарантирует, что для спектральной задачи (2) два квартета комплексных собственных значений, как можно видеть из рис. 1, остаются неустойчивыми при всех больших значениях поперечного волнового числа ρ.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Поскольку задача (4) симметрична, нам требуется доказать теорему 1 только для одного собственного значения в каждом комплексном квартете, например для ω, лежащего в первом квадранте комплексной плоскости. Пусть $\omega = 1+\epsilon^2 E$. Перепишем спектральную задачу (4) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \bigl(-\partial_x^2 - 4\operatorname{sech}^2(x)\bigr)\varphi - 2\operatorname{sech}^2(x)\psi &= -E\varphi, \\ -2\psi - \epsilon^2\bigl(\partial_x^2 + E + 4\operatorname{sech}^2(x)\bigr)\psi &= 2\epsilon^2\operatorname{sech}^2(x)\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

В главном порядке у первого уравнения системы (10) имеются экспоненциально убывающие собственные функции (7), отвечающие $E = E_0$ и $E = E_1$, заданным в (6). Однако второе уравнение системы (10) не имеет экспоненциально убывающих собственных функций для этих значений E, поскольку для них оператор

$$L_\epsilon(E) = -2 - \epsilon^2\bigl(\partial_x^2 + E + 4\operatorname{sech}^2(x)\bigr)$$

не является обратимым. Задача рассеяния для функций Йоста, связанных с непрерывным спектром оператора $L_\epsilon(E)$, допускает решения, которые на бесконечности ведут себя как

$$\psi(x) \sim e^{ikx}, \qquad \text{где} \quad k^2 = E + \frac{2}{\epsilon^2}.$$

Если $\operatorname{Im}E > 0$, то $\operatorname{Re}k\cdot\operatorname{Im}k > 0$. Условия излучения Зоммерфельда $\psi(x) \sim e^{\pm ikx}$ при $x \to \pm\infty$ выполнены для решений $\psi(x)$, которые экспоненциально убывают по x, если k продолжено от вещественных положительных значений (что соответствует $\operatorname{Im}E = 0$) до комплексных значений с положительной мнимой частью (для $\operatorname{Im}E > 0$). Поэтому наложим граничные условия Зоммерфельда для компоненты ψ, удовлетворяющей спектральной задаче (10):

$$\psi(x) \to a\begin{cases} e^{ikx}, & x \to \infty, \\ \sigma e^{-ikx}, & x \to -\infty, \end{cases} \qquad k = \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2+\epsilon^2 E}, \tag{11}$$

где a – амплитуда хвоста излучения, подлежащая определению, а $\sigma = \pm 1$ зависит от того, является ли ψ как функция переменной x четной или нечетной. Для вычисления a заметим, что справедлив следующий элементарный результат.

Лемма 1. *Рассмотрим ограниченные (в $L^\infty(\mathbb{R})$) решения $\psi(x)$ дифференциального уравнения второго порядка*

$$\psi'' + k^2\psi = f, \tag{12}$$

где $k \in \mathbb{C}$ при $\operatorname{Re} k > 0$ и $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, а $f \in L^1(\mathbb{R})$ представляет собой заданную функцию, четную или нечетную. Тогда функция

$$\psi(x) = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x} e^{ik(x-y)} f(y)\,dy + \frac{1}{2ik}\int_{x}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} f(y)\,dy \tag{13}$$

является единственным решением дифференциального уравнения (12) с той же четностью, что и f, которое удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда (11). При этом

$$a = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-iky}\,dy. \tag{14}$$

Доказательство. Решим уравнение (12) методом вариации постоянной, получим

$$\psi(x) = e^{ikx}\left(u(0) + \frac{1}{2ik}\int_0^x f(y)e^{-iky}\,dy\right) + e^{-ikx}\left(v(0) - \frac{1}{2ik}\int_0^x f(y)e^{iky}\,dy\right),$$

где $u(0)$ и $v(0)$ – произвольные постоянные. Фиксируем эти постоянные, используя условия излучения Зоммерфельда (11), что дает

$$u(0) = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{0} f(y)e^{-iky}\,dy, \qquad v(0) = \frac{1}{2ik}\int_{0}^{+\infty} f(y)e^{iky}\,dy.$$

Используя эти выражения и определение $a = \lim_{x\to\infty}\psi(x)e^{-ikx}$, получаем соотношения (13) и (14). Нетрудно проверить, что функция ψ имеет ту же четность, что и f. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 1 выберем собственное значение E_0 и соответствующий собственный вектор φ_0 оператора L_0, заданного в (5), и выполним разложение Ляпунова–Шмидта:

$$E = E_0 + \mathcal{E}, \qquad \varphi = \varphi_0 + \phi,$$

где функция ϕ ортогональна (в смысле скалярного произведения в $L^2(\mathbb{R})$) функции φ_0. Для упрощения вычислений предположим, что φ_0 нормирована на единицу по норме в $L^2(\mathbb{R})$. Кроме того, в разложении предполагается, что $\phi \in L^2(\mathbb{R})$.

Спектральная задача (10) переписывается в виде

$$\begin{aligned} (L_0 + E_0)\phi - 2\operatorname{sech}^2(x)\psi &= -\mathcal{E}(\varphi_0 + \phi),\\ L_\epsilon(E_0 + \mathcal{E})\psi &= 2\epsilon^2\operatorname{sech}^2(x)(\varphi_0 + \phi). \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку ϕ ортогональна φ_0, поправочный член $\mathcal{E}$ однозначно определяется проекцией первого уравнения системы (15) на функцию φ_0:

$$\mathcal{E} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}^2(x)\varphi_0(x)\psi(x)\,dx. \tag{16}$$

Если $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$, то $|\mathcal{E}| = O(\|\psi\|_{L^\infty})$. Пусть P – ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R})$ на образ оператора $L_0 + E_0$. Тогда функция ϕ однозначно определяется из линейного неоднородного уравнения

$$P(L_0 + E_0 + \mathcal{E})P\phi = 2\operatorname{sech}^2(x)\psi - 2\varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x)\varphi_0(x)\psi(x)\,dx, \tag{17}$$

где оператор $P(L_0 + E_0)P$ обратим и обратный оператор ограничен, кроме того, предполагается, что $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$. С другой стороны, функцию $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ можно однозначно определить, используя линейное неоднородное уравнение

$$\psi'' + k^2\psi = f, \quad \text{где} \quad f = -2\operatorname{sech}^2(x)(\varphi_0 + \phi + 2\psi), \tag{18}$$

и условие излучения Зоммерфельда (11). Заметим, что ψ не является вещественной функцией вследствие условия излучения Зоммерфельда (11) и зависимости от k, который зависит от ϵ:

$$k = \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2 + \epsilon^2 E_0 + \epsilon^2\mathcal{E}}. \tag{19}$$

Теперь мы готовы доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Функция f в правой части уравнения (18) экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$, если $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Исходя из решения (13) перепишем это уравнение в интегральном виде:

$$\begin{aligned}\psi(x) = \frac{i\epsilon}{\sqrt{2 + \epsilon^2 E_0 + \epsilon^2\mathcal{E}}} \int_{-\infty}^{x} e^{ik(x-y)} \operatorname{sech}^2(y)(\varphi_0 + \phi + 2\psi)(y)\,dy \,+ \\ + \frac{i\epsilon}{\sqrt{2 + \epsilon^2 E_0 + \epsilon^2\mathcal{E}}} \int_{x}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} \operatorname{sech}^2(y)(\varphi_0 + \phi + 2\psi)(y)\,dy.\end{aligned} \tag{20}$$

Оператор в правой части, действующий на функцию $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$, является сжимающим при малых значениях ϵ, если $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E} \in \mathbb{C}$ ограничены при $\epsilon \to 0$ и если $\operatorname{Im}\mathcal{E} \geqslant 0$ (что дает $\operatorname{Im} k \geqslant 0$). Согласно теореме о неподвижной точке [11] при малых значениях ϵ имеется единственное решение $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ интегрального уравнения (20) такое, что $\|\psi\|_{L^\infty} = O(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$. Это решение можно подставить в неоднородное уравнение (17).

Поскольку $|\mathcal{E}| = O(\|\psi\|_{L^\infty}) = O(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$, а оператор $P(L_0 + E_0)P$ обратим, и его обратный оператор ограничен, мы можем применить теорему о неявной функции и получить единственное решение $\phi \in H^2(\mathbb{R})$ неоднородного уравнения (17) при малых значениях ϵ такое, что $\|\phi\|_{H^2} = O(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$. Заметим, что вследствие вложения соболевского пространства $H^2(\mathbb{R})$ в $L^\infty(\mathbb{R})$ априорное допущение $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ для нахождения $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ в (18) согласуется с условием $\phi \in H^2(\mathbb{R})$ для решения, полученного с помощью теоремы о неявной функции.

Эти рассуждения доказывают неравенства (8). Остается показать, что $\operatorname{Im}\mathcal{E} > 0$ для малых ненулевых значений ϵ. Если это так, то вещественное собственное значение $1 + \epsilon^2 E_0$ испытывает бифуркацию в первом квадранте комплексной плоскости, что дает собственное значение $\omega = 1 + \epsilon^2 E_0 + \epsilon^2\mathcal{E}$ для спектральной задачи (4). Сохранение такого изолированного собственного значения при малых ϵ следует из регулярной теории возмущений. Кроме того, если $\operatorname{Im}\mathcal{E} > 0$, то собственная функция ψ

в (20) экспоненциально убывает по x на бесконечности. В результате собственный вектор (ϕ, ψ) определен в пространстве $H^2(\mathbb{R})$ для малых ненулевых значений ϵ, хотя $\|\psi\|_{H^2}$ и расходится при $\epsilon \to 0$.

Чтобы доказать, что $\operatorname{Im} \mathcal{E} > 0$ при малых, но ненулевых значениях ϵ, используем граничное условие (11), уравнение (18) и, интегрируя по частям, получим приближенное равенство

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x)(\varphi_0+\phi)\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x)\big(-\partial_x^2 - k^2 - 4\operatorname{sech}^2(x)\big)\psi(x)\,dx =$$
$$= (-\bar{\psi}\psi_x + \bar{\psi}_x\psi)\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\big(-\partial_x^2 - k^2 - 4\operatorname{sech}^2(x)\big)\bar{\psi}(x)\,dx =$$
$$= 4ik|a(\epsilon)|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x)(\varphi_0+\bar{\phi})\bar{\psi}(x)\,dx,$$

где параметр $k = \sqrt{2}\epsilon^{-1}(1+O(\epsilon^2))$ вещественный в главном порядке. Отсюда

$$\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x)(\varphi_0+\phi)\psi(x)\,dx = k|a(\epsilon)|^2.$$

Напомним, что φ_0 является вещественнозначной функцией (см. равенства (7)).

Используя неравенства (8), определение (14) и проекцию (16), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\mathcal{E} &= 2\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x)\varphi_0(x)\psi(x)\,dx = 2k|a(\epsilon)|^2\big(1+O(\epsilon)\big) = \\ &= \frac{2}{k}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(x)\varphi_0(x)e^{-ikx}\,dx\right|^2\big(1+O(\epsilon)\big).\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, величина $\operatorname{Im}\mathcal{E}$ является строго положительной. Заметим, что выражение (21) известно в квантовой механике как золотое правило Ферми [12]. Поскольку $k = O(\epsilon^{-1})$ при $\epsilon \to 0$, преобразование Фурье функции $\operatorname{sech}^2(x)\varphi_0(x)$ при таких k экспоненциально мало по отношению к ϵ. Поэтому $\operatorname{Im}\omega > 0$ экспоненциально мала по отношению к ϵ. Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЙ 1 И 2

Для доказательства предложения 1 выберем значение $E_{\rm c}$, не зависящее от ϵ и отличное от E_0 и E_1 из (6). Положим $E = E_{\rm c} + \mathcal{E}$ для некоторых значений $\mathcal{E}$, зависящих от малого ϵ. Тогда спектральная задача (10) переписывается в виде

$$\begin{aligned}(L_0 + E_{\rm c})\varphi - 2\operatorname{sech}^2(x)\psi &= -\mathcal{E}\varphi,\\ L_\epsilon(E_{\rm c}+\mathcal{E})\psi &= 2\epsilon^2\operatorname{sech}^2(x)\varphi.\end{aligned} \tag{22}$$

Доказательство предложения 1. Если величина $E_{\rm c}$ является вещественной и отрицательной, то система (22) имеет только осциллирующие решения, поэтому для значений E, близких к $E_{\rm c}$, не существует экспоненциально убывающих собственных функций. Более того, заметим, что оператор Шредингера L_0, заданный в (5), не имеет резонансов в конечных точках. Поэтому если $E_{\rm c} = 0$, то бифуркация изолированных собственных значений не может случиться. Таким образом, если значение E_c вещественно, то мы рассматриваем $E_c > 0$, а если значение E_c является комплексным, то выбираем E_c с положительной мнимой частью.

В соответствии с леммой 1 перепишем второе уравнение системы (22) в интегральном виде:

$$\psi(x) = \frac{i\epsilon}{\sqrt{2+\epsilon^2 E_c + \epsilon^2 \mathcal{E}}} \int_{-\infty}^{x} e^{ik(x-y)} \operatorname{sech}^2(y)(\varphi + 2\psi)(y)\, dy + \\ + \frac{i\epsilon}{\sqrt{2+\epsilon^2 E_c + \epsilon^2 \mathcal{E}}} \int_{x}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} \operatorname{sech}^2(y)(\varphi + 2\psi)(y)\, dy. \quad (23)$$

Как и выше, оператор в правой части равенства, задающего функцию $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$, является сжимающим при малых значениях ϵ, если $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E} \in \mathbb{C}$ ограничены при $\epsilon \to 0$. При этом $\operatorname{Im}(E_c + \mathcal{E}) \geqslant 0$ (что влечет $\operatorname{Im} k \geqslant 0$). Согласно теореме о неподвижной точке при этих условиях для малых значений ϵ имеется единственное решение $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ интегрального уравнения (23) такое, что $\|\psi\|_{L^\infty} = O(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$. Более того, $\psi = 0$, если $\varphi = 0$. Это решение можно подставить в первое уравнение системы (22).

Оператор $L_0 + E_c$ обратим, и обратный оператор ограничен, если величина E_c является комплексной или вещественной и положительной, но отличной от E_0 и E_1. Существует решение $\varphi = 0$ первого уравнения системы (22), поскольку $\psi = 0$, если $\varphi = 0$. Согласно теореме о неявной функции решение $\varphi = 0$ является единственным для малых значений ϵ и для любого малого значения $\mathcal{E}$. Поэтому $E = E_c + \mathcal{E}$ не является собственным значением спектральной задачи (10). Предложение доказано.

Для доказательства предложения 2 в теореме 1 вычислим явно $\operatorname{Im}\omega$ в асимптотическом пределе $\epsilon \to 0$. Из соотношений (19) и (21) следует, что

$$\operatorname{Im}\omega = \sqrt{2}\epsilon^3 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(x)\varphi_0(x) e^{-ikx} dx \right|^2 \big(1 + O(\epsilon)\big),$$

где $k = \sqrt{2}\epsilon^{-1}(1 + O(\epsilon^2))$.

Доказательство предложения 2. Рассмотрим собственную функцию φ_0 из соотношений (7), отвечающую меньшему собственному значению в (6). Используя интеграл 3.985 из справочника [14], получаем

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(x)\varphi_0(x) e^{-ikx} dx = 2\int_0^\infty \operatorname{sech}^p(x)\cos(kx)\, dx = \frac{2^{p-1}}{\Gamma(p)} \left| \Gamma\left(\frac{p+ik}{2}\right)\right|^2,$$

где $p = 2 + \sqrt{E_0} = (\sqrt{17} + 3)/2$. Поскольку $k = O(\epsilon^{-1})$ и $\epsilon \to 0$, можно использовать асимптотический предел 8.328 из [14]:

$$\lim_{|y|\to\infty} |\Gamma(x+iy)| e^{\pi|y|/2} |y|^{1/2-x} = \sqrt{2\pi}. \quad (24)$$

В результате мы устанавливаем асимптотическую эквивалентность

$$I_0 = \frac{2^{p-1}}{\Gamma(p)} \left| \Gamma\left(\frac{p+ik}{2}\right)\right|^2 \sim \frac{2\pi}{\Gamma(p) k^{1-p}}\, e^{-\pi k/2} \sim \frac{2^{(p+1)/2}\pi}{\Gamma(p)}\, \epsilon^{1-p} e^{-\pi/\sqrt{2}\epsilon}.$$

Поэтому главный асимптотический порядок для $\mathrm{Im}\,\omega$ имеет вид

$$\mathrm{Im}\,\omega \sim \frac{2^{p+3/2}\pi^2}{\Gamma^2(p)}\,\epsilon^{5-2p}e^{-\sqrt{2}\pi/\epsilon}. \tag{25}$$

Теперь рассмотрим собственную функцию φ_1 из (7), которая отвечает второму собственному значению в (6). Используя интеграл 3.985 из справочника [14] и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}^2(x)\varphi_1(x)e^{-ikx}dx = \\ &= -\frac{2ik}{q}\int_0^{\infty} \mathrm{sech}^q(x)\cos(kx)\,dx = -i\frac{k2^{q-1}}{q\Gamma(q)}\left|\Gamma\left(\frac{q+ik}{2}\right)\right|^2, \end{aligned}$$

где $q = 2+\sqrt{E_1} = (\sqrt{17}+1)/2$. Используя предел (24), имеем

$$I_1 = -\frac{ik2^{q-1}}{q\Gamma(q)}\left|\Gamma\left(\frac{q+ik}{2}\right)\right|^2 \sim -\frac{2\pi ik}{q\Gamma(q)k^{1-q}}\,e^{-\pi k/2} \sim -i\frac{2^{(q+2)/2}\pi}{q\Gamma(q)}\,\epsilon^{-q}e^{-\pi/\sqrt{2}\epsilon}.$$

Поэтому главный асимптотический порядок для $\mathrm{Im}\,\omega$ имеет вид

$$\mathrm{Im}\,\omega \sim \frac{2^{q+5/2}\pi^2}{q^2\Gamma^2(q)}\epsilon^{3-2q}e^{-\sqrt{2}\pi/\epsilon}. \tag{26}$$

Как в формуле (25), так и в формуле (26) выражения для $\mathrm{Im}\,\omega$ содержат алгебраически большие множители, в которые параметр ϵ входит соответственно в степенях $5-2p = 2-\sqrt{17} < 0$ и $3-2q = 2-\sqrt{17} < 0$. Несмотря на это величина $\mathrm{Im}\,\omega$ экспоненциально мала при $\epsilon \to 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказано, что спектральная задача (2) имеет в точности два квартета комплексных неустойчивых собственных значений в асимптотическом пределе больших поперечных волновых чисел. В том же пределе получены точные асимптотические выражения для скорости роста неустойчивости.

Было бы интересно численно проверить справедливость полученных асимптотических результатов. Как обсуждалось в работе [3], численная аппроксимация собственных значений в этом асимптотическом пределе представляет собой непростую задачу численного анализа из-за высокочастотных колебаний собственных функций при больших значениях λ, т. е. при малых ϵ. Из рис. 1 видно, что существующие численные результаты невозможно сравнить с асимптотическими результатами, полученными в настоящей работе. Эта численная задача требует дальнейших исследований.

Благодарности. Работа Д. Е. Пелиновского, Е. А. Рубинской и О. Е. Куркиной выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.B37.21.0868). О. Е. Куркина выражает свою благодарность за поддержку Программе “Научный Фонд НИУ ВШЭ” (грант № 12-01-0103). Б. Деконинк благодарит National Science Foundation of USA (грант NSF-DMS-1008001).

Список литературы

[1] В. Е. Захаров, А. Н. Рубенчик, *ЖЭТФ*, **65**:3 (1973), 997–1011.

[2] Yu. S. Kivshar, D. E. Pelinovsky, *Phys. Rep.*, **331**:4 (2000), 117–195.

[3] B. Deconinck, D. Pelinovsky, J. D. Carter, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **462**:2071 (2006), 2039–2061.

[4] J. Yang, *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*, Mathematical Modeling and Computation, **16**, SIAM, Philadelphia, PA, 2010.

[5] N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. A*, **85**:6 (2012), 063837, 13 pp., arXiv: 1207.5252.

[6] M. J. Ablowitz, H. Segur, *J. Fluid Mech.*, **92**:4 (1979), 691–715.

[7] S.-P. Gorza, B. Deconinck, Ph. Emplit, T. Trogdon, M. Haelterman, *Phys. Rev. Lett.*, **106**:9 (2011), 094101, 4 pp.

[8] S.-P. Gorza, B. Deconinck, T. Trogdon, P. Emplit, M. Haelterman, *Opt. Lett.*, **37**:22 (2012), 4657–4659.

[9] D. E. Pelinovsky, J. Yang, *Phys. D*, **255** (2013), 1–11, arXiv: 1210.0938.

[10] Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 1, ИЛ, М., 1958.

[11] S.-N. Chow, J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **251**, Springer, New York, 1982.

[12] S. J. Gustafson, I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, 2006.

[13] С. Альберверио, С. Ю. Доброхотов, Е. С. Семенов, *ТМФ*, **138**:1 (2004), 116–126.

[14] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.

Поступила в редакцию 24.06.2013,
после доработки 20.09.2013