

# Многокомпонентные вихревые решения симметрично связанных нелинейных уравнений Шрёдингера

**А. С. ДЕСЯТНИКОВ**

Австралийский национальный университет  
e-mail: asd124@rsphysy.anu.edu.au

**Д. Е. ПЕЛИНОВСКИЙ**

Университет МакМастера, Канада  
e-mail: dmpeli@math.mcmaster.ca

**ДЖ. ЯНГ**

Университет Вермонта, США  
e-mail: jyang@cem.uvm.edu

УДК 517.957

**Ключевые слова:** связанные нелинейные уравнения Шрёдингера, солитоны, вихри, спектральная устойчивость, калибровочная инвариантность.

## Аннотация

Гамильтонова система некогерентно связанных нелинейных уравнений Шрёдингера рассмотрена в контексте физических экспериментов с фоторефрактивными кристаллами и конденсатами Бозе—Эйнштейна. Из-за некогерентных связей у гамильтоновой системы существует группа симметрий, содержащая преобразования калибровочной симметрии и вращения поляризации. Показано, что группа симметрий вращения порождает большое семейство вихревых решений, обобщающих скалярные вихри, пары вихрей с удвоенным или скрытым зарядом, а также связанные состояния, содержащие солитоны и вихри. Построены новые семейства вихрей с разными частотами и зарядами у одной и той же компоненты. Матрица линеаризованной задачи устойчивости приведена к блочно-диагональному виду для дальнейшего исследования неустойчивых собственных значений численными методами.

## Abstract

*A. S. Desyatnikov, D. E. Pelinovsky, J. Yang, Multi-component vortex solutions in symmetric coupled nonlinear Schrödinger equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 35–63.*

A Hamiltonian system of incoherently coupled nonlinear Schrödinger equations is considered in the context of physical experiments in photorefractive crystals and Bose–Einstein condensates. Due to the incoherent coupling, the Hamiltonian system has a group of various symmetries that include symmetries with respect to gauge transformations and polarization rotations. We show that the group of rotational symmetries generates a large family of vortex solutions that generalize scalar vortices, vortex pairs with either double or hidden charge and coupled states between solitons and vortices. Novel families of vortices with different frequencies and vortices with different charges at the same component are constructed and their linearized stability problem is block-diagonalized for numerical analysis of unstable eigenvalues.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2006, том 12, № 7, с. 35–63.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

## 1. Введение

Оптические вихри [27] привлекают всё большее внимание исследователей благодаря широкому применению так называемых сингулярных оптических пучков [36]. Они используются в широком спектре областей: от оптических пинцетов до квантовой теории информации [28]. Ожидается, что локализованные *вихревые решения* в нелинейной среде [10, 18] могут быть использованы в качестве носителей информации в будущих фотонных вычислительных устройствах. Вихри также определяют тесную связь между самофокусировкой света в нелинейной оптике и динамикой волн в конденсированных средах и возбуждённых конденсатах Бозе—Эйнштейна [14].

Вихревые решения подвержены нарушающей симметрию модуляционной неустойчивости в фокусирующих нелинейных системах [15]. Были указаны несколько способов стабилизации самофокусирующихся вихрей, например, было предсказано существование стабильных вихревых решений в средах с конкурирующими нелинейностями [10, 31], а также в нелокальных нелинейных средах [6, 40]. Другой подход к стабилизации вихрей был предложен для частично когерентных оптических вихрей [29], так как порог модуляционной неустойчивости зависит от степени неполной когерентности света [3, 22]. Такая стабилизация вихревых пучков была продемонстрирована в экспериментах с фоторефрактивными средами [17].

Чтобы глубже понять стабилизирующий эффект неполной когерентности в нелинейных средах, было предложено разложение по модам [7], подобное статистическому описанию частично коррелированных полей. В рамках данного подхода оптическое поле состоит из бесконечного числа компонент  $\psi_k$ , которые распространяются под близкими углами и образуют спектр когерентности. Суммарное поле изменяется в нелинейном потенциале, индуцированном взаимодействием компонент, например в возбуждённой фоторефрактивной среде. Соответствующая нелинейная поправка  $\delta n(E)$  к коэффициенту преломления есть функция полной интенсивности  $E = \sum_k |\psi_k|^2$ . Таким образом, поправка симметрична по отношению ко всем компонентам и может рассматриваться как обобщение системы Манакова [1]. Потенциал нелинейного взаимодействия для конденсата Бозе—Эйнштейна также имеет только слабую асимметрию: например, для двухкомпонентного конденсата, составленного из сверхтонких состояний  $^{87}\text{Rb}$ , вклады от действия и взаимодействия каждой компоненты различаются на несколько процентов [30].

Особое свойство вихрей, возбуждаемых в частично когерентном поле, — это возникновение характерной кольцевой дислокации в корреляционной функции [29]. Как было недавно продемонстрировано [24] для частично когерентных вихрей с фиксированным зарядом  $m = 1$ , модель, состоящая из трёх взаимодействующих компонент с вихревыми зарядами  $(m - 1, m, m + 1)$ , достаточна как для описания возникновения характеристического кольца корреляционной функции, так и для обоснования его устойчивости в нелинейной среде.

Физическая задача эволюции частично когерентных вихрей в нелинейной среде может быть переформулирована как задача устойчивости *многокомпонентных вихревых солитонов*. Существование вихревых солитонов было предсказано для кусочно-линейного потенциала [25, 26]. Исследования [10] показали, что связь солитон-вихрь с зарядами  $(0, 1)$  модуляционно неустойчива в изотропной среде с насыщающимся потенциалом нелинейного взаимодействия. Вихревая компонента распадается в дипольную моду [16], которая является линейно устойчивой [41]; предсказанная устойчивость распространяется также на вращающиеся дипольные моды [32]. Похожие состояния, например мультипольные моды [12, 13], оказались метастабильными в нелинейных фоторефрактивных средах. Остаётся неизвестным, достижима ли устойчивость вблизи точки бифуркации для мультиполей высших порядков (соответствующий анализ бифуркационных диаграмм содержится в [41]). Обобщение на большее число компонент учитывает трёхкомпонентные связанные состояния, содержащие солитоны и диполи либо солитоны и вихри [9]. Похожие решения существуют, даже когда потенциал пространственно анизотропен [23]. Численный анализ устойчивости этих трёхкомпонентных решений был проведён в [39].

В данной статье мы изучаем существование и устойчивость связанных состояний, образованных вихрями и солитонами в системе связанных нелинейных уравнений Шрёдингера (НУШ) с дополнительной инвариантностью относительно вращения. Многокомпонентные вихри позволяют перейти к так называемым векторным солитонам — «кольцам-ожерельям» [8], образованным кольцеобразными пучками, возбуждёнными по азимутальному направлению, подобными «световым ожерельям» [33–35]. Устойчивость решений с большим угловым моментом отличается от их аналогов с меньшим («скрытым») моментом. Стабилизация вихрей, вращающихся в противоположных направлениях на фоне нарушений азимутальной симметрии, была подтверждена для модели с насыщением [5, 42] и для системы с нелинейной функцией третьего-пятого порядка [11, 21]. Стабилизация была обнаружена экспериментально в фоторефрактивной дефокусирующей среде [19]. Сравнительно недавно было обнаружено новое физическое явление для модели с нелинейной функцией третьего-пятого порядка — так называемый «перескок заряда» [11]. Данный эффект связан с особым типом неустойчивости вихрей с зарядами  $(+m, -m)$ . Именно, режим слабой неустойчивости с индексом вращения  $s = 2m$  индуцирует передачу момента вращения внутри двухкомпонентного семейства солитонов, периодически меняющих свой заряд на противоположный [11]. Этот эффект — частное следствие симметрии вращения системы связанных НУШ.

В данной работе изложены результаты исследования гамильтоновой системы нелинейно связанных НУШ. Указана группа вращений, сохраняющая симплектическую структуру гамильтоновой системы. Группа включает в себя преобразования калибровочной симметрии и вращения поляризации. Далее рассмотрены все стационарные локализованные решения и найдено большое семейство вихревых решений, порождённое группой симметрий вращения. Эти решения обобщают скалярные вихри и пары вихрей с удвоенными или скрытыми заря-

дами. В частности, построены новые семейства вихрей с разными частотами и разными зарядами у одних и тех же компонент; семейства являются решениями НУШ. Наконец, мы определяем основные свойства линейризованной задачи устойчивости, связанные с наличием группы симплектических вращений. Матрица линейризованной задачи устойчивости для вихревых решений приведена к блочно-диагональному виду, произведён анализ неустойчивых собственных значений для связанных состояний между солитонами и парами вихрей с удвоенным или скрытым зарядом в возбуждённой системе НУШ.

Структура работы такова. В разделе 2 описана модель некогерентно связанных НУШ. В разделе 3 обсуждаются симплектические симметрии гамильтоновой системы, заданные калибровочными преобразованиями и вращениями поляризации. В разделе 4 приведена классификация стационарных локализованных решений гамильтоновой системы. В разделе 5 описаны одномерные солитоны. В разделе 6 приведена классификация солитонных и вихревых решений в двумерном пространстве и указаны результаты численного эксперимента, описывающего пару вихрей с разными зарядами в системе, образованной двумя кубическими НУШ (системе Манакова). В разделе 7 обсуждается линейризованная задача устойчивости вихревых решений; соответствующая данной задаче матрица приведена к блочно-диагональному виду. В разделе 8 содержатся результаты численного анализа существования и устойчивости связанных состояний, образованных солитонами и парами вихрей в системе из трёх НУШ.

## 2. Обозначения

Рассмотрим систему связанных нелинейных уравнений Шрёдингера (НУШ)

$$i\dot{\psi}_k + \Delta\psi_k = W'(E)\psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где  $\psi_k(x, t): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа в пространстве  $\mathbb{R}^d \ni x$ , точка над  $\psi_k$  означает частную производную по времени  $t \in \mathbb{R}$  и  $W(E): \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  — нелинейная функция класса  $C^2$  скалярной переменной  $E = \sum_{k=1}^n |\psi_k|^2$ , такая что  $W(0) = W'(0) = 0$ .

Система (2.1) может быть представлена в виде гамильтоновой системы со стандартной симплектической структурой. Пусть  $\psi_k = u_k + iv_k$ , где  $(u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$  и  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Далее, пусть  $I$  и  $O$  — единичная и нулевая матрицы размера  $n \times n$ . Тогда система (2.1) эквивалентна гамильтоновой системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} \\ \nabla_{\mathbf{v}} \end{pmatrix} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (2.2)$$

где  $H$  — гамильтониан вида

$$H = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} \mathbf{u} \cdot \partial_{x_j} \mathbf{u} + \partial_{x_j} \mathbf{v} \cdot \partial_{x_j} \mathbf{v}) + W(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right] dx \quad (2.3)$$

(используется стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ ). Значения  $H$  постоянны по времени  $t$  благодаря инвариантности системы НУШ (2.1) относительно сдвигов по  $t$ . В системе НУШ (2.1) существуют и другие сохраняющиеся величины (см. [37, гл. 2]). В частности, вследствие инвариантности относительно сдвигов по  $x$  сохраняется импульс  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_d)^T$ , где

$$P_j = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{v} \cdot \partial_{x_j} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \partial_{x_j} \mathbf{v}) dx, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.4)$$

В силу инвариантности  $\Delta$  относительно вращений в пространстве переменных  $x$  в системе НУШ (2.1) сохраняется момент импульса, который в случае  $d = 2$  имеет вид

$$M = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{u} \cdot \partial_\theta \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \partial_\theta \mathbf{u}) dx, \quad (2.5)$$

где  $\partial_\theta = x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1}$ . По причине инвариантности относительно калибровочных преобразований сохраняется  $n$  зарядов, имеющих вид

$$Q_k = \int_{\mathbb{R}^d} (u_k^2 + v_k^2) dx, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Далее в работе мы анализируем полную группу симметрий вращения системы НУШ (2.1).

### 3. Симметрии вращения

Нелинейная функция  $W(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$  и гамильтониан  $H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  инвариантны по отношению к  $N$ -параметрической группе вращений в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ , здесь

$$N = \binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} = n(2n-1).$$

Следующий результат нужен для того, чтобы охарактеризовать группу вращений, сохраняющих симплектическую структуру гамильтоновой системы (2.2).

**Лемма 1.** Пусть  $y = Gx$  — обратимое линейное преобразование из  $\mathbb{R}^m \ni x$  в  $\mathbb{R}^m \ni y$ . Пусть  $H: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  —  $G$ -инвариантный гамильтониан для системы  $\dot{x} = J \nabla_x H(x)$ , такой что  $H(Gx) = H(x)$ . Преобразование  $y = Gx$  является симплектическим, причём  $\dot{y} = J \nabla_y H(y)$  тогда и только тогда, когда

$$J = G J G^T. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Хотя такой результат обычен для гамильтоновой механики (см. [20, раздел A]), утверждение элементарно следует из тождеств

$$\dot{y} = G \dot{x}, \quad \nabla_x H(x) = G^T \nabla_y H(y)$$

и того факта, что преобразование  $G$  обратимо.  $\square$

**Следствие 1.** Если группа инфинитезимальных симметрий порождена матрицей  $G = I + g$ , близкой к единичной ( $g$  бесконечно мало), симплектическая структура сохраняется тогда и только тогда, когда

$$gJ + Jg^T = O. \quad (3.2)$$

**Лемма 2.** Пусть  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})^T \in \mathbb{R}^{2n}$  — вектор зависимых переменных гамильтоновой системы (2.2) и

$$J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}.$$

Тогда группа симплектических вращений системы (2.2) порождается матрицей

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.3)$$

где  $A^T = -A$  и  $B^T = B$  — матрицы в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Видим, что  $n(2n - 1)$ -параметрическая группа вращений в  $\mathbb{R}^{2n}$  порождается матрицей  $g: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$  инфинитезимальных симметрий вида

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix},$$

где  $A$  и  $C$  — кососимметричные матрицы, а  $B$  — произвольная матрица размера  $n \times n$ . Используя связь (3.2), мы сразу же находим ограничения  $A = C$  и  $B^T = B$ , которые выделяют из всей  $n(2n - 1)$ -мерной группы вращений  $n^2$ -параметрическую группу симплектических вращений.  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $\psi \in \mathbb{C}^n$  — вектор зависимых переменных для системы связанных НУШ (2.1):  $\psi = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ . Тогда группа симплектических вращений системы связанных НУШ (2.1) порождается матрицей  $g_c: \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ , где  $g_c = A - iB$  с  $A^T = -A$  и  $B^T = B$ .

Существуют  $n^2$  величин, постоянных по времени  $t$  и связанных  $n^2$ -мерной группой симплектических вращений. Хорошо известно [20], что сохраняющиеся величины соответствуют скалярным умножениям  $i\bar{\psi} \cdot A\psi$  и  $\bar{\psi} \cdot B\psi$ . Так как гамильтонова система (2.2) определена на  $\mathbb{R}^d \ni x$ , сохраняющиеся величины эквивалентны набору квадратичных функционалов

$$Q_{k,m} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_k \bar{\psi}_m dx, \quad k = 1, \dots, n, \quad m = k, \dots, n. \quad (3.4)$$

Существует  $n$  зарядов с вещественными значениями  $Q_{k,k} \equiv Q_k$ , которые совпадают с зарядами (2.6). Дополнительные  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  сохраняющихся величин  $Q_{k,m}$  при  $k \neq m$  имеют комплексные значения. Общее число вещественных сохраняющихся величин  $Q_{k,m}$  равно  $n + n(n - 1) = n^2$ , и оно совпадает с количеством симплектических вращений — преобразований симметрии системы (2.2). Легко вывести сохранение  $Q_{k,m}$  прямо из системы связанных НУШ (2.1) для  $\psi_k(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ .

**Пример 1** ( $n = 2$ ). Будем использовать комплексные обозначения  $\psi \in \mathbb{C}^2$ . Существуют  $n^2 = 4$  матрицы преобразований, которые сохраняют решения системы НУШ (2.1) при  $n = 2$ :

$$G_1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} \cos \theta_4 & i \sin \theta_4 \\ i \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{pmatrix},$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  — произвольные параметры. Параметры  $\theta_1$  и  $\theta_2$  связаны с калибровочной инвариантностью (сдвигом фазы), в то время как параметры  $\theta_3$  и  $\theta_4$  относятся к симметрии вращения гамильтоновой системы (2.2). Если существует решение системы связанных НУШ (2.1) в форме  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ , то существует его 4-параметрическое продолжение вида

$$\tilde{\psi}_1 = \alpha_1 e^{i\theta_1} \psi_1 + \alpha_2 e^{i\theta_2} \psi_2, \quad \tilde{\psi}_2 = -\bar{\alpha}_2 e^{i\theta_1} \psi_1 + \bar{\alpha}_1 e^{i\theta_2} \psi_2, \quad (3.5)$$

где

$$\alpha_1 = \cos \theta_3 \cos \theta_4 + i \sin \theta_3 \sin \theta_4, \quad \alpha_2 = \sin \theta_3 \cos \theta_4 + i \cos \theta_3 \sin \theta_4.$$

В общем случае ( $n \geq 2$ ) существуют  $n$ -параметрические продолжения решений, что обусловлено инвариантностью относительно калибровочного преобразования. Кроме того, существует  $n(n-1)$ -параметрическое продолжение, связанное с симметрией вращения гамильтоновой системы (2.2).

## 4. Стационарные локализованные решения связанной системы

Класс стационарных решений системы связанных НУШ (2.1) определяется следующим образом:

$$\psi_k = \varphi_k(x) e^{i\omega_k t}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где  $\omega_k$  — вещественные параметры. Функции  $\varphi_k(x): \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$  являются решениями краевой задачи

$$\varphi_k \in L^2(\mathbb{R}^d): \quad \Delta \varphi_k - \omega_k \varphi_k = W'(E) \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

где  $E = \sum_{k=1}^n |\varphi_k(x)|^2$ . Краевая задача (4.2) совпадает с вариационной задачей для критических точек функционала Ляпунова

$$\Lambda = H + \sum_{k=1}^n \omega_k Q_k. \quad (4.3)$$

Чтобы классифицировать все стационарные локализованные решения краевой задачи (4.2), мы выделяем два особых случая.

**Лемма 3.** Для любого  $k \neq m$  выполнено либо  $\omega_k = \omega_m$ , либо

$$\omega_k \neq \omega_m, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k(x) \bar{\varphi}_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad (4.4)$$

где  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  — стационарное решение краевой задачи (4.2).

**Доказательство.** Утверждение выводится с помощью интегрирования задачи (4.2) и использования формулы Грина. Первое равенство в (4.4) гарантирует, что  $\dot{Q}_{k,m} = 0$  для любых  $k \neq m$ , где  $Q_{k,m}$  берётся из (3.4) и  $\psi_k(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$  взято из (4.1).  $\square$

Рассмотрим два частных класса стационарных решений краевой задачи (4.2) и общий (смешанный) случай.

### Случай I: $\omega_k \neq \omega_m$ для всех $k \neq m$

Нетривиальные двухкомпонентные решения при  $\omega_1 \neq \omega_2$  вычислены в [26] для кусочно-линейной функции — потенциала  $W(E)$ , а в [16] — для рациональной функции  $W(E)$ . В частности, в [16, 26] было рассмотрено связанное состояние, образованное фундаментальными солитонами и вихрями заряда  $m$ . Ограничения (4.4) для этих решений выполняются, так как вихревые заряды разных компонент решений не равны между собой и интегрирование по углу в полярных координатах всегда даёт нуль. Устойчивость стационарных двухкомпонентных решений с  $\omega_1 \neq \omega_2$  рассмотрена в [41]. Очевидно, группа симметрий вращения (3.5) порождает нестационарное решение  $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$  с двумя частотами в одной компоненте. Существование таких нестационарных решений с несколькими частотами объясняет существование (точных) внутренних мод (собственных векторов, соответствующих чисто мнимым собственным числам) в линейризованной задаче, обнаруженных в [41].

### Случай II: $\omega_k = \omega_m$ для всех $k \neq m$

Пусть  $\omega_1 = \dots = \omega_n \equiv \omega$ . Функционал  $\Lambda$  в (4.3) инвариантен по отношению к  $n^2$ -параметрической группе симплектических вращений, и краевая задача может быть записана в эллиптической форме:

$$\varphi_k \in L^2(\mathbb{R}^d): \quad \Delta \varphi_k = W'_\omega(E) \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

где  $W_\omega = W(E) + \omega E$  — функция скалярной переменной  $E = \sum_{k=1}^n |\varphi_k(x)|^2$ . По теореме Грина для задачи (4.5) получаем

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{\varphi}_k \nabla \varphi_m - \varphi_m \nabla \bar{\varphi}_k) = 0, \\ \operatorname{div}(\varphi_k \nabla \varphi_m - \varphi_m \nabla \varphi_k) = 0, \end{cases} \quad 1 \leq k, m \leq n. \quad (4.6)$$

Из выражений (4.6) следует, что вектор  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)^T$  с компонентами

$$p_j = i(\bar{\varphi} \cdot \partial_{x_j} \varphi - \varphi \cdot \partial_{x_j} \bar{\varphi}), \quad j = 1, \dots, d,$$



удовлетворяет соотношению  $\nabla \cdot \mathbf{p} = 0$ . Следовательно, существует (псевдо)векторное поле  $\mathbf{A}$ , такое что  $\mathbf{p} = \nabla \times \mathbf{A}$  и импульс  $\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{p} dx$ , определённый в (2.4), тождественно равен нулю. Стационарные решения задачи (4.5) в двумерном пространстве были рассмотрены в [5, 13, 42]; в частности, были исследованы пары вихрей с удвоенными или скрытыми зарядами. Применяя элементы группы симметрий вращения к парам вихрей, можно получить стационарные решения общей формы, например дипольные и вихревые моды связанной системы [2, 8]. Устойчивость двухкомпонентных решений при  $\omega_1 = \omega_2$  была рассмотрена применительно к системе связанных НУШ с насыщением [5, 42]. Было показано, что пары вихрей обоих типов неустойчивы, но пара вихрей со скрытым зарядом менее нестабильна, чем пара с удвоенным зарядом. Для связанных НУШ с конкурирующей нелинейностью третьего-пятого порядка может быть достижима полная стабилизация вихрей со скрытым импульсом [11, 21].

### Общий случай III

Локализованные решения задачи (4.2) можно представить посредством  $p$  компонент с разными параметрами  $\omega_k$  и  $q = n - p$  компонентами с одинаковыми параметрами  $\omega_k$ . Например, в [12, 23, 39] было рассмотрено трёхкомпонентное связанное состояние, образованное фундаментальным солитоном и парой вихрей со скрытым или удвоенным зарядом. Локальное ветвление таких трёхкомпонентных состояний будет рассмотрено ниже в разделе 8.

## 5. Солитоны в одномерном пространстве

Рассмотрим задачу построения одномерных решений в случае II ( $\omega_k = \omega_m$  для всех  $k \neq m$ ), таких что  $d = 1$  и  $\omega_1 = \dots = \omega_n \equiv \omega$ . Из дивергентной формы (4.6) для решений класса  $L^2(\mathbb{R})$  следует, что

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_k(x)\varphi'_m(x) - \varphi_m(x)\bar{\varphi}'_k(x) = 0, \\ \varphi_k(x)\varphi'_m(x) - \varphi_m(x)\varphi'_k(x) = 0 \end{cases} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Тогда существуют такие константы  $c_{m,k}, d_{m,k} \in \mathbb{C}$ , что  $\varphi_m(x) = c_{m,k}\bar{\varphi}_k(x)$  и  $\varphi_m(x) = d_{m,k}\varphi_k(x)$ . Следовательно, семейство наиболее общего вида решений краевой задачи (4.5) при  $d = 1$  имеет вид

$$\varphi_k = a_k \varphi(x), \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

где  $\varphi(x): \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  и  $a_k \in \mathbb{C}$ . Используя нормировку  $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = 1$ , определим функцию  $\varphi(x)$  как решение нормированной краевой задачи

$$\varphi \in L^2(\mathbb{R}): \quad \varphi'' = W'_\omega(\varphi^2)\varphi. \quad (5.2)$$

Чтобы исключить сдвиги по  $x$  и определить единственное решение  $\varphi(x)$ , рассмотрим (5.2) на пространстве чётных функций от  $x \in \mathbb{R}$ . Семейство (5.1) может

быть порождено одним частным скалярным решением

$$\varphi_1 = \varphi(x), \quad \varphi_k = 0, \quad k = 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

В самом деле, достаточно применить  $n^2$ -параметрическую группу симплектических вращений. В результате  $n$  комплексных параметров  $a_k$  семейства (5.1) с нормировкой  $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = 1$  выражаются через  $n^2$  вещественных параметров, задающих симплектические вращения. Подсчёт параметров показывает, что  $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$  параметров группы симплектических вращений избыточны.

## 6. Двумерные вихри

Рассмотрим задачу построения решений в случае II ( $\omega_k = \omega_m$  для всех  $k \neq m$ ) при  $d = 2$  и  $\omega_1 = \dots = \omega_n \equiv \omega$ . Пользуясь редукцией (5.1), получим семейство векторнозначных решений, исходя из скалярного решения (5.3) и действуя группой симплектических вращений. Отметим что редукция (5.1) не порождает наиболее общего семейства решений краевой задачи (4.5) при  $d = 2$ . Выполнив разделение переменных, мы получаем классификацию всех возможных вихревых решений уравнения (4.5).

Будем использовать систему полярных координат  $(r, \theta)$  с центром вихря в точке  $r = 0$  для описания вихревых решений. Это позволяет исключить два параметра, соответствующие пространственной трансляции и связанные с соответствующей инвариантностью системы НУШ (2.1). Разделим полярные координаты следующим образом:

$$\varphi_k = \phi_k(\theta)R_k(r), \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.1)$$

где  $R_k(r): \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  и  $\phi_k(\theta): [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{C}$ . После разделения переменных уравнение (4.5) распадается на два уравнения:

$$\phi_k(\theta + 2\pi) = \phi_k(\theta): \quad \phi_k'' + m_k^2 \phi_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.2)$$

$$R_k \in L^2(\mathbb{R}_+): \quad R_k'' + \frac{1}{r}R_k' - \frac{m_k^2}{r^2}R_k = W'_\omega(E_0)R_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

причём должно выполняться соотношение

$$E = \sum_{k=1}^n R_k^2(r)|\phi_k(\theta)|^2 = E_0(r). \quad (6.4)$$

Так как функции  $\phi_k(\theta)$  периодичны, параметры  $m_k$  — целые числа. Величина  $m_k$  — это *вихревой заряд*  $k$ -й компоненты. При  $m_k = 0$   $k$ -я компонента является *солитоном*, а при  $m_k \neq 0$  — *вихрем*. В следующей лемме показано, что существуют два принципиально различных вида решений системы связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (6.3).

**Лемма 4.** Для любых  $k \neq m$  либо выполнено  $m_k^2 = m_m^2$  и тогда  $R_k = c_{m,k}R_m$  для некоторых  $c_{m,k} \in \mathbb{R}$ , либо  $m_k^2 \neq m_m^2$ , а функции  $R_k(r)$ ,  $R_m(r)$  удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} \frac{R_k(r)R_m(r)dr}{r} = 0, \quad m_k^2 \neq m_m^2. \quad (6.5)$$

Во втором случае не существует константы  $c_{m,k} \in \mathbb{R}$ , такой что  $R_k = c_{m,k}R_m$ . В то же время выполнено

$$\phi_k = a_k e^{\pm i m_k \theta}, \quad \phi_m = a_m e^{\pm i m_m \theta}, \quad (6.6)$$

где  $a_k, a_m \in \mathbb{C}$ .

**Доказательство.** Из уравнений (6.3) следует, что для функций  $R_k$  и  $R_m$  при любом  $k \neq m$  выполняется уравнение

$$\frac{d}{dr}[r(R_m R'_k - R'_m R_k)] + \frac{m_m^2 - m_k^2}{r} R_m R_k = 0, \quad r \geq 0. \quad (6.7)$$

При  $m_k^2 = m_m^2$  и  $R_m, R_k \in L^2(\mathbb{R}_+)$  из уравнения (6.7) следует, что  $R_m R'_k - R'_m R_k = 0$ ; следовательно, существуют такие  $c_{m,k} \in \mathbb{R}$ , что  $R_k = c_{m,k}R_m$ . В случае  $m_k^2 \neq m_m^2$  уравнение (6.7) можно проинтегрировать по  $r \in (0, \infty)$  при условии, что  $R_k(r)$ ,  $R_m(r)$  и их производные ограничены при  $r \rightarrow 0$  и принадлежат классу  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . В результате мы получаем условие (6.5), причём дополнительное условие  $R_k = c_{m,k}R_m$  не удовлетворяет системе (6.3) ни при каких  $c_{m,k} \in \mathbb{R}$ . Представление (6.6) требуется в связи с тем, что  $E_0(r)$  в (6.4) не зависит от  $\theta$ .  $\square$

Рассмотрим отдельно два частных типа стационарных решений связанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.3), а затем исследуем общий (смешанный) случай.

### Случай I: $m_k^2 \neq m_m^2$ для всех $k \neq m$

Нетривиальным свойством связанной системы (6.3) является существование инвариантных редукций  $R_k = 0$  при некоторых значениях  $k$ . Поэтому мы будем классифицировать семейства вихрей с различными зарядами в соответствии с числом непустых (ненулевых) компонент  $R_k(r)$ . Однокомпонентный (скалярный) вихрь имеет вид (5.3) и описывается в полярных координатах следующим образом:

$$\varphi_1 = R_1(r)e^{i m_1 \theta}, \quad \varphi_k = 0, \quad k = 2, \dots, n. \quad (6.8)$$

Скалярное решение (6.8) с помощью симплектических вращений можно преобразовать в векторное решение

$$\varphi_k = a_k R(r)e^{i m \theta}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.9)$$

где  $R \equiv R_1$ ,  $m \equiv m_1$  и параметры  $a_k \in \mathbb{C}$  нормированы условием  $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = 1$ . В случае  $n = 2$  векторное решение (6.9) является *парой вихрей с удвоенным зарядом*. Эти векторные решения рассмотрены в [10].

Аналогично определим двухкомпонентный вихрь:

$$\varphi_1 = \alpha_1 R_1(r) e^{im_1 \theta}, \quad \varphi_2 = \alpha_2 R_2(r) e^{im_2 \theta}, \quad \varphi_k = 0, \quad k = 3, \dots, n, \quad (6.10)$$

где  $m_1^2 \neq m_2^2$  и  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ . В общем случае  $N$ -компонентный вихрь определяется различными значениями  $m_k^2$ ,  $k = 1, \dots, N$ , где  $2 \leq N \leq n$ .  $N$ -компонентные вихри могут быть подвергнуты вращению при помощи группы  $n^2$ -параметрических симплектических вращений, и в результате получаются стационарные решения с *разными зарядами у одной и той же компоненты*.

**Пример 2.** Рассмотрим систему кубических НУШ (2.1) при  $n = 2$  и  $W'(E) = -E$ . Без потери общности положим  $\omega = 1$ , так как параметр  $\omega$  можно нормировать калибровочным преобразованием. Используя преобразование (3.5), размножим решение (6.10) при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  в более общее семейство вихревых решений:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(r, \theta) \\ \varphi_2(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{i\theta_1} & \alpha_2 e^{i\theta_2} \\ -\bar{\alpha}_2 e^{i\theta_1} & \bar{\alpha}_1 e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1(r) e^{im_1 \theta} \\ R_2(r) e^{im_2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.3) приобретает вид

$$L_{m_1} R_1 = 0, \quad L_{m_2} R_2 = 0,$$

где

$$L_m \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - 1 + R_1^2 + R_2^2. \quad (6.12)$$

Найдём решения  $R_1(r)$  и  $R_2(r)$ , такие что  $R_k \sim r^{|m_k|}$  при  $r \rightarrow 0$  и  $R_k(r)$  экспоненциально убывает при  $r \rightarrow \infty$ . На рис. 1 показаны полученные численно решения, которые задают огибающие  $R_1(r)$  и  $R_2(r)$  при  $(m_1, m_2) = (0, 1); (0, 2); (1, 2)$ . Пусть  $n_k$  означает число узлов функции  $R_k(r)$  при  $r > 0$ . Тогда из рис. 1 видно, что сохраняются целые числа:

$$|m_1| + n_1 = |m_2| + n_2.$$

Во время численного интегрирования НУШ (2.1) мы заметили, что все вихревые решения, изображённые на рис. 1, нестабильны в линейном приближении. Радиальная нестабильность связанных состояний, образованных солитонами и вихрями заряда  $m$ , приводит к коллапсу [4] центрального пика, и эта неустойчивость развивается быстрее азимутальных неустойчивостей. Данная ситуация наблюдается для решений типа  $(0, 1)$  и типа  $(0, 2)$ , которые соответствуют рис. 1 (а) и (б). Разрушающая систему неустойчивость развивается значительно медленнее в случае, когда в каждой компоненте присутствуют вихри (например, это показано на рис. 1 (с)). В таком случае развивается азимутальная неустойчивость, разрушающая кольца, прежде чем они коллапсируют [38].

Результаты численного интегрирования системы кубических НУШ (2.1) для вихревых решений при  $m_1 = 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $m_2 = \pm 2$  и  $n_2 = 0$  (см. рис. 1 (с), вверху)

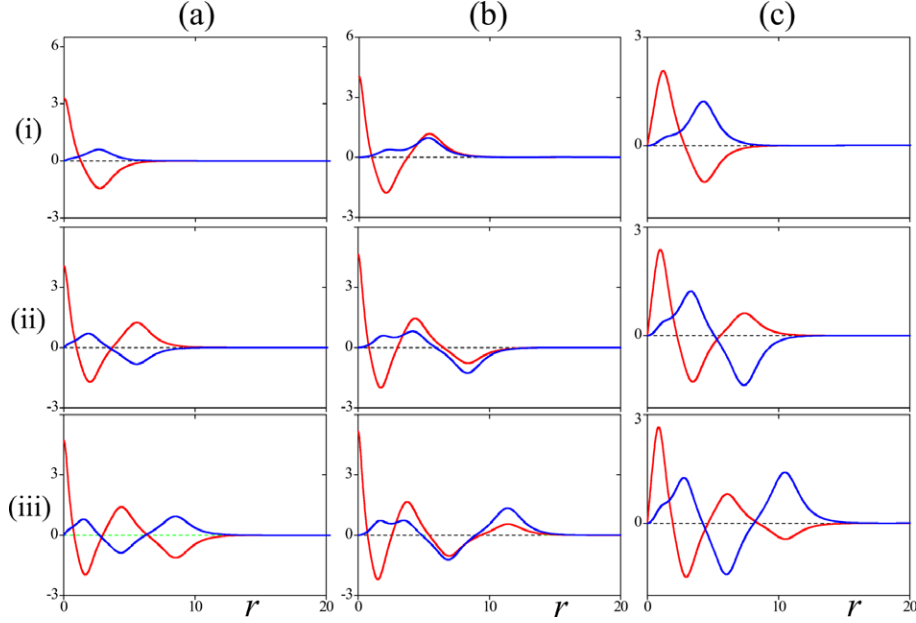


Рис. 1. Огибающие  $R_1(r)$  и  $R_2(r)$  двухкомпонентного вихря с различными зарядами у одних и тех же компонент,  $(m_1, m_2)$ : (a)  $(0, 1)$ , (b)  $(0, 2)$ , (c)  $(1, 2)$ . В строках (i), (ii) и (iii) показаны решения для  $n_2 = 0$ ,  $n_2 = 1$ ,  $n_2 = 2$  соответственно

приведены на рис. 2 и 3. Начальные условия показаны на рис. 2 (a) и рис. 3 (a), (c), а окончательные результаты — на рис. 2 (b), (c) для  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$  и на рис. 3 (b), (d) для  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$ .

### Случай II: $m_k^2 = m_m^2$ для всех $k \neq m$

Пусть  $m_1^2 = \dots = m_n^2 \equiv m^2$  и функция  $R(r)$  определяется из краевой задачи

$$R \in L^2(\mathbb{R}_+): \quad R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R = W'_\omega(R^2)R \quad (6.13)$$

при нормировке  $\sum_{k=1}^n |\phi_k|^2 = 1$ . Система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.2) имеет общее решение

$$\phi_k = a_k e^{im\theta} + b_k e^{-im\theta}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.14)$$

Используя условие (6.4), задающее разделение переменных, мы получаем два условия относительно  $2n$  комплексных параметров  $a_k$  и  $b_k$ :

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 + |b_k|^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k = 0. \quad (6.15)$$

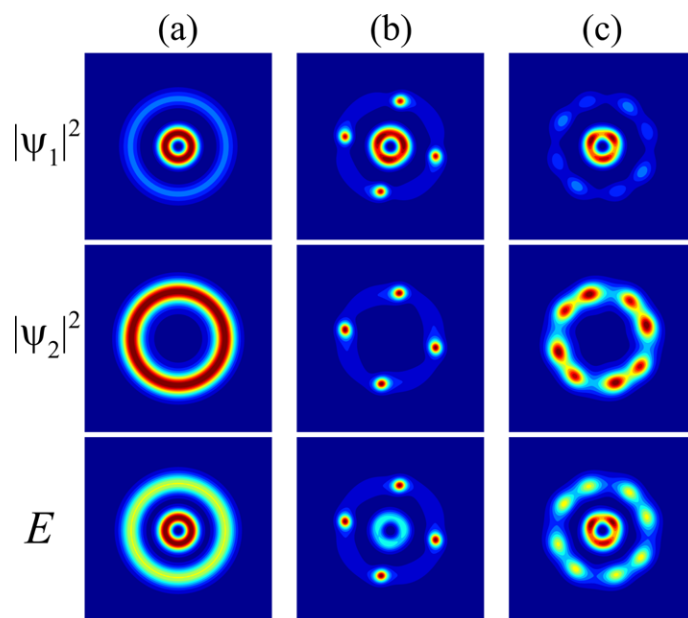


Рис. 2. Интенсивности  $|\psi_1|^2$ ,  $|\psi_2|^2$  и величина  $E = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$  для двухкомпонентного решения (6.11) с  $\alpha_1 = 1$  и  $\alpha_2 = 0$  при (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 7.5$  и  $(m_1, m_2) = (+1, +2)$  и (c)  $t = 8$  и  $(m_1, m_2) = (+1, -2)$

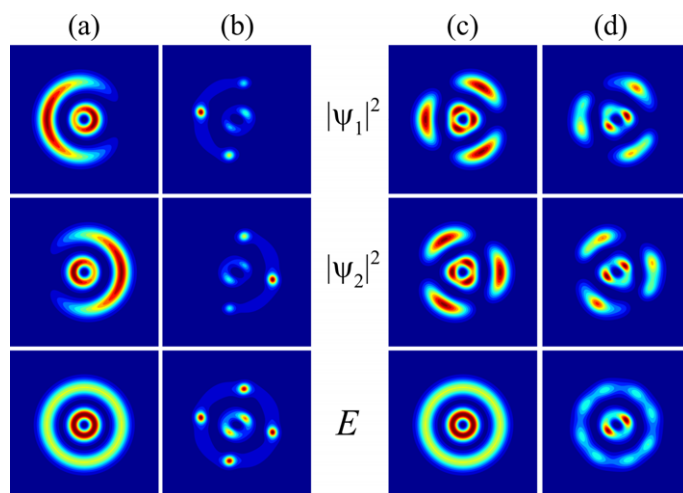


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, для двухкомпонентного решения (6.11) с  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$  при (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 8$  и  $(m_1, m_2) = (+1, +2)$  и при (c)  $t = 0$ , (d)  $t = 8$  при  $(m_1, m_2) = (+1, -2)$

Пусть  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{C}^2$  и  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k$  — стандартное скалярное произведение на  $\mathbb{C}^n$ , такое что  $\|\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$ . Два условия (6.15) могут быть записаны в виде

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = 1, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \quad (6.16)$$

При  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  семейство стационарных решений (6.14) порождено из однокомпонентного вихря (6.8) при помощи группы из  $n^2$  симплектических вращений. Так как это семейство имеет  $n$  комплексных параметров, удовлетворяющих единственному условию (6.15), очевидно, что  $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$  параметров группы симплектических вращений избыточны. При  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  семейство стационарных решений (6.14) строится на основе приведённого ниже двухкомпонентного вихревого решения посредством группы из  $n^2$  симплектических вращений:

$$\varphi_1 = \alpha_1 R(r) e^{im\theta}, \quad \varphi_2 = \alpha_2 R(r) e^{-im\theta}, \quad \varphi_k = 0, \quad k = 3, \dots, n, \quad (6.17)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  и  $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$ . В случае  $n = 2$  вихревое решение (6.17) является *парой вихрей со скрытым зарядом*. Очевидно, что в *различных компонентах* двухкомпонентного вихревого решения (6.17) присутствуют *равные заряды*. У этого семейства имеется  $2n$  комплексных параметров, удовлетворяющих одному вещественнозначному и одному комплексному условию (6.15). Поэтому очевидно, что  $1 + n^2 - 4n + 3 = (n-2)^2$  параметров, задающие симплектические вращения, избыточны. Пары вихрей со скрытым зарядом рассматривались в [10].

### Общий случай III

В наиболее общей ситуации  $p$ -компонентные вихри с различными зарядами могут образовывать связанные состояния из  $q$  двухкомпонентных пар вихрей со скрытым зарядом при условиях  $p + 2q \leq n$  и  $n \geq 3$ .

## 7. Линеаризация стационарных решений

Для изучения устойчивости стационарных решений (4.1) при эволюции системы НУШ (2.1) используем метод линеаризации:

$$\psi_k = e^{i\omega_k t} (\varphi_k(x) + u_k(x) e^{\lambda t} + \bar{v}_k(x) e^{\bar{\lambda} t}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (7.1)$$

где  $(u_k, v_k): \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}^2$  — компоненты собственного вектора в  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{2n})$ , соответствующие собственному числу  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Пусть  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ,  $E(x) = \sum_{k=1}^n |\varphi_k(x)|^2$  и  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ . Линеаризованная задача описывает спектральную устойчивость стационарных решений по отношению к эволюции системы НУШ (2.1) во

времени. Линеаризованная задача записывается в гамильтоновой форме следующим образом:

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = i\lambda \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

где самосопряжённый оператор  $\mathcal{H}$  на  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{2n})$  имеет вид

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \Omega & O \\ O & \Omega \end{pmatrix} + (-\Delta + W'(E)) \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} + W''(E) \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\varphi}^T \quad \varphi^T). \quad (7.3)$$

Последнее слагаемое в операторе (7.3) состоит из произведения столбца и строки, которое является матрицей ранга один для любого  $x \in \mathbb{R}^d$ . Опишем основные свойства линеаризованной задачи (7.2), (7.3), связанные с группой симплектических вращений.

### Случай I: $\omega_k \neq \omega_m$ для всех $k \neq m$

Симметрия системы НУШ (2.1) относительно вращений позволяет получить нестационарные решения путём применения симплектических вращений к стационарным решениям с *различными* параметрами  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Производные этих решений по параметрам вращения задают собственные векторы линеаризованной задачи, соответствующие ненулевым собственным числам  $\lambda$ . Покажем, что каждая пара не равных между собой частот  $\omega_k \neq \omega_m$  при  $k \neq m$  соответствует паре чисто мнимых собственных чисел  $\lambda = \pm i(\omega_k - \omega_m)$ . Каждая пара либо является изолированной, либо включена в непрерывный спектр линеаризованной задачи (7.2).

**Лемма 5.** Пусть  $\omega_k \neq \omega_m$  для всех  $k \neq m$ . Тогда у линеаризованной задачи имеется пара собственных векторов и собственных чисел вида

$$u_k = \varphi_m(x), \quad v_m = -\bar{\varphi}_k(x), \quad \lambda = i(\omega_m - \omega_k), \quad (7.4)$$

$$u_m = \varphi_k(x), \quad v_k = -\bar{\varphi}_m(x), \quad \lambda = -i(\omega_m - \omega_k) \quad (7.5)$$

(все остальные компоненты равны нулю).

**Доказательство.** Достаточно заметить, что для собственных векторов (7.4) и (7.5) справедливо

$$(\bar{\varphi}^T \quad \varphi^T) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \bar{\varphi}_k u_k + \bar{\varphi}_m u_m + \varphi_k v_k + \varphi_m v_m = 0.$$

Теперь линеаризованная задача (7.2) сводится к решению уравнения в частных производных (4.2) для компонент  $\varphi_k(x)$  и  $\varphi_m(x)$ .  $\square$

Простой подсчёт показывает, что существуют  $n(n-1)/2$  пар чисто мнимых собственных чисел, описанных в лемме 5, если все параметры  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  попарно различны. Кроме того, существуют  $n$  нулевых собственных чисел, отвечающих  $n$  калибровочным преобразованиям симметрии; собственные векторы заданы формулами (7.4) при  $m = k$ . В результате группа из  $n^2$  симплектических



вращений соответствует лишь чисто мнимым и нулевым собственным числам с собственными векторами (7.4) и (7.5) линеаризованной задачи (7.2).

### Случай II: $\omega_k = \omega_m$ для всех $k \neq m$

Пусть  $\omega_1 = \dots = \omega_n \equiv \omega$ , так что  $\Omega = \omega I$ . Все  $n(n-1)$  собственных чисел в лемме 5 равны нулю, так что каждое из  $n^2$  симплектических вращений порождает многомерное ядро оператора  $\mathcal{H}$ . Это свойство связано с тем фактом, что  $n^2$  симплектических вращений отображают стационарные решения (4.1) с равными значениями параметров  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  в этот же класс стационарных решений. Линеаризованную задачу (7.2), (7.3) можно упростить, если стационарные решения получены из  $N$ -компонентного вихревого решения посредством  $n > N$  симплектических вращений. Ниже мы рассматриваем симплектические вращения скалярного вихря (6.8) и двухкомпонентной пары вихрей (6.17) со скрытым зарядом.

#### (i) Симплектические вращения скалярного вихря (6.8)

Стационарные решения в векторной форме (6.9) получаются из скалярного вихря (6.8) действием симплектических вращений. Покажем, что матрица линеаризованной задачи (7.2), (7.3) для векторного решения (6.9) может быть приведена к блочно-диагональному виду, образованному несамосопряжённому оператором размера  $2 \times 2$  и  $n-1$  парой не связанных между собой самосопряжённых линейных операторов Шрёдингера.

Пусть  $\varphi_k(x) = a_k \varphi(x)$ , где  $a_k \in \mathbb{C}$  удовлетворяют нормировочному условию  $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = 1$ . Тогда оператор  $\mathcal{H}$  можно переписать в виде

$$\mathcal{H} = (\omega - \Delta + W'(|\varphi|^2)) \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} + W''(|\varphi|^2) \begin{pmatrix} |\varphi|^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) & \varphi^2(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) \\ \bar{\varphi}^2(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) & |\varphi|^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

где скалярное произведение  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{k=1}^n f_k \bar{g}_k$  задано на векторном пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Из условия нормировки следует, что  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2 = 1$ . Применяя метод ортогонализации Грама—Шмидта, построим ортонормированный базис в пространстве  $\mathbb{C}^n$ :

$$S_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{n-1}\}, \quad (7.7)$$

где набор  $\{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^{n-1}$  порождает ортогональное дополнение вектора  $\mathbf{a}$  в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Компоненты собственных векторов  $\mathbf{u}(x)$  и  $\mathbf{v}(s)$  могут быть разложены по ортонормированному базису  $S_1$ ; имеем

$$\mathbf{u}(x) = \alpha^+(x) \mathbf{a} + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^+(x) \mathbf{c}_j, \quad \mathbf{v}(x) = \alpha^-(x) \bar{\mathbf{a}} + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^-(x) \bar{\mathbf{c}}_j.$$

Распишем линейную задачу на собственные значения (7.2) в базисе  $S_1$ . В результате получим следующую систему для уравнений  $(\alpha^+, \alpha^-)$  и  $(\gamma_j^+, \gamma_j^-)$ :

$$\begin{aligned} (\omega - \Delta + W'(|\varphi|^2))\alpha^+ + W''(|\varphi|^2)(|\varphi|^2\alpha^+ + \varphi^2\alpha^-) &= i\lambda\alpha^+, \\ (\omega - \Delta + W'(|\varphi|^2))\alpha^- + W''(|\varphi|^2)(\bar{\varphi}^2\alpha^+ + |\varphi|^2\alpha^-) &= -i\lambda\alpha^-, \end{aligned} \quad (7.8)$$

а также

$$\begin{aligned} (\omega - \Delta + W'(|\varphi|^2))\gamma_j^+ &= i\lambda\gamma_j^+, \\ (\omega - \Delta + W'(|\varphi|^2))\gamma_j^- &= -i\lambda\gamma_j^-. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Задача нахождения собственных чисел для несамосопряжённой задачи (7.8) размерности  $2 \times 2$  отщепляется от самосопряжённых задач (7.9). Стабильность векторных вихрей (6.9) полностью определяется стабильностью скалярных вихрей (6.8), заданных несамосопряжённой задачей (7.8).

## (ii) Симплектические вращения двухкомпонентной пары вихрей (6.17) со скрытым зарядом

Стационарное решение в векторном виде (6.1) с условием суперпозиции (6.14) получается из двухкомпонентной пары вихрей (6.17) со скрытым зарядом при помощи симплектических вращений. Покажем, что матрица линеаризованной задачи (7.2), (7.3) для векторных решений (6.1) с условием (6.14) может быть приведена к блочно-диагональному виду, образованному несамосопряжённым оператором размера  $4 \times 4$  и  $n - 2$  парами несвязанных между собой самосопряжённых линейных операторов Шрёдингера.

Пусть  $\varphi(x)$  задаётся формулой (6.1), причём выполнены (6.14) и нормировка (6.15). Тогда оператор  $\mathcal{H}$  принимает вид

$$\mathcal{H} = (\omega - \Delta + W'(R^2)) \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} + R^2 W''(R^2) \mathcal{H}_1, \quad (7.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{a}}^T \quad \mathbf{b}^T) + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{b}}^T \quad \mathbf{a}^T) + \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{b}}^T \quad \mathbf{a}^T) e^{2im\theta} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{a}}^T \quad \mathbf{b}^T) e^{-2im\theta}. \end{aligned}$$

Полярные координаты  $(r, \theta)$  могут быть выделены разложением в ряд Фурье по периодическим функциям на отрезке  $\theta \in [0, 2\pi]$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(r, \theta) \\ \mathbf{v}(r, \theta) \end{pmatrix} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s(r) \\ \mathbf{v}_s(r) \end{pmatrix} e^{is\theta}, \quad (7.11)$$

так что система (7.2) приводится к виду

$$\begin{aligned}
& (\omega - \Delta_s + W'(R^2)) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix} + \\
& + R^2 W''(R^2) \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{a}}^T \quad \mathbf{b}^T) + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{b}}^T \quad \mathbf{a}^T) \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix} + \\
& + R^2 W''(R^2) \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{b}}^T \quad \mathbf{a}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{s-2m} \\ \mathbf{v}_{s-2m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \cdot (\bar{\mathbf{a}}^T \quad \mathbf{b}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{s+2m} \\ \mathbf{v}_{s+2m} \end{pmatrix} \right] = \\
& = i\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ -\mathbf{v}_s \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_s = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{s^2}{r^2}. \quad (7.12)$$

Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ . Тогда существует ортогональный базис в  $\mathbb{C}^n$

$$S_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{n-2}\}, \quad (7.13)$$

векторы  $\{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^{n-2}$  которого порождают ортогональное дополнение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в  $\mathbb{C}^n$ . Согласно условию нормировки (6.15)  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны в пространстве  $\mathbb{C}^n$  и их нормы определены параметром  $\mu \in (-1, 1)$ :

$$|\mathbf{a}|^2 = \frac{1+\mu}{2}, \quad |\mathbf{b}|^2 = \frac{1-\mu}{2},$$

причём  $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 1$  и  $|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = \mu$ . Компоненты собственных векторов  $\mathbf{u}_s(r)$  и  $\mathbf{v}_s(r)$  могут быть разложены по ортогональному базису  $S_2$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_s(r) &= \alpha_s^+(r) \mathbf{a} + \beta_s^+(r) \mathbf{b} + \sum_{j=1}^{n-2} \gamma_{s,j}^+(r) \mathbf{c}_j, \\
\mathbf{v}_s(r) &= \alpha_s^-(r) \bar{\mathbf{b}} + \beta_s^-(r) \bar{\mathbf{a}} + \sum_{j=1}^{n-2} \gamma_{s,j}^-(r) \bar{\mathbf{c}}_j.
\end{aligned}$$

Разложив линейную задачу (7.2) на собственные числа по базису  $S_2$ , получаем следующую систему для  $(\alpha_s^+, \alpha_s^-, \beta_{s-2m}^+, \beta_{s-2m}^-)$  и  $(\gamma_{s,j}^+, \gamma_{s,j}^-)$ :

$$\begin{aligned}
& (\omega - \Delta_s + W'(R^2)) \alpha_s^+ + R^2 W''(R^2) \Upsilon = i\lambda \alpha_s^+, \\
& (\omega - \Delta_s + W'(R^2)) \alpha_s^- + R^2 W''(R^2) \Upsilon = -i\lambda \alpha_s^-, \\
& (\omega - \Delta_{s-2m} + W'(R^2)) \beta_{s-2m}^+ + R^2 W''(R^2) \Upsilon = i\lambda \beta_{s-2m}^+, \\
& (\omega - \Delta_{s-2m} + W'(R^2)) \beta_{s-2m}^- + R^2 W''(R^2) \Upsilon = -i\lambda \beta_{s-2m}^-,
\end{aligned} \quad (7.14)$$

а также

$$\begin{aligned}
& (\omega - \Delta_s + W'(R^2)) \gamma_{s,j}^+ = i\lambda \gamma_{s,j}^+, \\
& (\omega - \Delta_s + W'(R^2)) \gamma_{s,j}^- = -i\lambda \gamma_{s,j}^-,
\end{aligned} \quad (7.15)$$

где

$$\Upsilon = \frac{1+\mu}{2} (\alpha_s^+ + \beta_{s-2m}^-) + \frac{1-\mu}{2} (\alpha_s^- + \beta_{s-2m}^+).$$

Задача (7.14) нахождения собственных чисел для несамосопряжённого оператора размера  $4 \times 4$  отделена от аналогичных задач (7.15) для самосопряжённых операторов размера  $2 \times 2$ . Устойчивость векторных вихрей (6.1) при выполнении условия (6.14) полностью определяется устойчивостью двухкомпонентной пары вихрей (6.17) со скрытым зарядом в задаче нахождения собственных чисел для несамосопряжённого оператора (7.14) размера  $4 \times 4$ . При  $\mu = \pm 1$  задача распадается на задачу для несамосопряжённого двумерного оператора и две несвязанные задачи для самосопряжённых операторов, так как пара вихрей (6.17) при  $\mu = \pm 1$  вырождается в скалярный вихрь (6.8). При  $\mu \in (-1, 1)$  дальнейшее упрощение несамосопряжённой задачи невозможно. Особо отметим симметричный случай  $\mu = 0$ , который соответствует одинаковым амплитудам  $\alpha_1 = \alpha_2$  в паре вихрей (6.17). Численный анализ несамосопряжённой задачи размера  $4 \times 4$  для собственных чисел в симметричном случае  $\mu = 0$  был рассмотрен в [42] для системы НУШ с насыщением и в [11] для НУШ с нелинейностью третьей-пятой степени.

### (iii) Общий случай

Семейство стационарных вихревых решений порождается из  $p$ -компонентного вихря с разными зарядами и  $q$  двухкомпонентных пар вихрей со скрытым зарядом, причём  $p + 2q \leq n$ . Следовательно, матрица линеаризованной задачи (7.2) для этих векторных решений может быть приведена к блочно-диагональному виду с соответствующими блоками на диагонали. Для определения устойчивости сложносоставного вихря, полученного симплектическими вращениями из простого вихря (так называемого затравочного вихря), можно применить следующий алгоритм.

1. Начать с решения линеаризованной задачи для затравочного вихря, например скалярного вихря (6.8) или пары вихрей со скрытым зарядом (6.17).
2. Найти все собственные числа и собственные векторы несвязанных линеаризованных задач.
3. Применить к затравочному вихрю и собственным векторам линеаризованной задачи те же симплектические вращения, которые были использованы для получения сложносоставного вихря.

Например, устойчивость пары вихрей с удвоенным зарядом (6.9) может изучаться путём рассмотрения устойчивости скалярного вихря (6.8), а устойчивость вихрей с условием суперпозиции (6.14) — исследованием пары вихрей (6.17) со скрытым зарядом.

## 8. Связанные состояния солитон-вихрь в НУШ с насыщением

Рассмотрим локальную бифуркацию связанного состояния, образованного фундаментальным солитоном (первая компонента) и парой вихрей со скрытым

или удвоенным зарядом в двух других компонентах. Такие трёхкомпонентные связанные состояния возникают, например, в системе НУШ с насыщением (2.1) при  $n = 3$  и

$$W'(E) = -\frac{E}{1 + \sigma E}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (8.1)$$

В [39] численными методами исследовано существование и устойчивость таких структур. Здесь мы проводим анализ бифуркационных диаграмм в продолжение нашей работы [41] и заодно исправляем некоторые неточности в численных результатах [39].

Используем нормировку  $\omega_1 = 1$ . Фундаментальный солитон первой компоненты  $\varphi_1 = U(x)$  удовлетворяет условиям скалярной краевой задачи

$$U \in L^2(\mathbb{R}^2): \quad \Delta U - U = W'(U^2)U, \quad (8.2)$$

где  $U(x)$  — вещественнозначное, неотрицательное основное состояние. Локальная бифуркация пары вихрей во второй и третьей компонентах решения возникают, когда линейный оператор  $\mathcal{L} = -\Delta + W'(U^2)$  допускает нетривиальное ограниченное состояние для  $\varphi_2(x)$  и  $\varphi_3(x)$ :

$$\mathcal{L}\varphi_j = -\omega_j\varphi_j, \quad j = 2, 3, \quad (8.3)$$

где  $\omega_j > 0$ . Согласно лемме 3, если  $\omega_{2,3} \neq 1$ , то

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_{2,3}(x)U(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\varphi}_{2,3}(x)U(x) dx = 0.$$

Если  $U(x)$  — радиально-симметричный фундаментальный солитон и  $\varphi_{2,3}(x)$  — пара вихрей со скрытым или удвоенным зарядом, то все условия тривиально выполняются в силу простого интегрирования по углу  $\theta$ . По лемме 3, если  $\omega_2 \neq \omega_3$ , то

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_2(x)\varphi_3(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\varphi}_2(x)\varphi_3(x) dx = 0.$$

Условия не выполняются, когда  $\varphi_{2,3}(x)$  — пара вихрей со скрытым или удвоенным зарядом; в итоге, эти решения существуют только при  $\omega_2 = \omega_3 \equiv \omega$ . По лемме 4 функции  $\varphi_{2,3}(x)$  для пар вихрей могут быть переписаны в полярных координатах при разделении переменных (6.1) с  $R_2 = R_3 \equiv R(r)$  и  $m_2 = \pm m_3 \equiv m$ .

Рассмотрим оба случая для решений в форме

$$\varphi_1 = U(r), \quad \varphi_2 = \alpha_2 R(r)e^{im\theta}, \quad \varphi_3 = \alpha_3 R(r)e^{\pm im\theta}, \quad (8.4)$$

где  $m \in \mathbb{N}$ . Имеем

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{1+\mu}{2}}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{1-\mu}{2}}, \quad -1 \leq \mu \leq 1,$$

а функции  $U(r)$  и  $R(r)$  являются решениями системы связанных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) - U(r) = W'(U^2 + R^2)U, \quad (8.5)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{m^2}{r^2}R(r) - \omega R(r) = W'(U^2 + R^2)R. \quad (8.6)$$

Функции  $U(r)$  и  $R(r)$  — вещественнозначные, неотрицательные основные состояния для  $r > 0$  с  $U(0) > 0$  и  $R(0) = 0$ . Действием группы симплектических вращений пара  $(m, m)$  вихрей с удвоенным зарядом переводится в скалярный вихрь с  $\alpha_2 = 1$  и  $\alpha_3 = 0$ , в то время как пара вихрей со скрытым зарядом  $(m, -m)$  может быть преобразована в более общее семейство решений с условием суперпозиции (6.14). Связанная задача (8.5), (8.6) аналогична двухкомпонентной системе НУШ. В [41] аналитически и численно рассматривается локальная бифуркация вихревого решения  $(U, R)$  при  $m = 1$  с возбуждённой нелинейностью. Ряды теории возмущений для вихревого решения в окрестности порога локальной бифуркации имеют вид

$$U = u_0(r) + \varepsilon^2 u_2(r) + O(\varepsilon^4), \quad R = \varepsilon \phi_1(r) + \varepsilon^3 \phi_3(r) + O(\varepsilon^4), \quad (8.7)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \omega_2 + O(\varepsilon^4),$$

где функция  $u_0(r)$  есть решение нелинейного уравнения

$$u_0'' + \frac{1}{r}u_0' - u_0 = W'(u_0^2)u_0,$$

функция  $\phi_1(r)$  — собственный вектор оператора  $\mathcal{L}$  с  $U = u_0$  и зарядом  $m$ , соответствующий собственному числу  $\omega = \omega_0$ ,

$$\phi_1'' + \frac{1}{r}\phi_1' - \frac{m^2}{r^2}\phi_1 - \omega_0\phi_1 = W'(u_0^2)\phi_1,$$

функция  $u_2(r)$  есть решение неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_2'' + \frac{1}{r}u_2' - u_2 - W'(u_0^2)u_2 - 2W''(u_0^2)u_0^2u_2 = W''(u_0^2)u_0\phi_1^2,$$

а поправка  $\omega_2$  находится из неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения для  $\phi_3(r)$ :

$$\omega_2 \int_0^\infty \phi_1^2(r)r \, dr = \int_0^\infty W''(u_0^2)(2u_0u_2 + \phi_1^2)\phi_1^2r \, dr. \quad (8.8)$$

Численные эксперименты по описанию локальной бифуркации в системе НУШ (2.1) с насыщением при выполнении (8.1) показывают, что  $\omega_2 > 0$  (по крайней мере для случая  $m = 1$  и  $\sigma = 0,5$ ) [41]. Линеаризованная задача устойчивости для связанного состояния принимает вид (7.2), (7.3). Пара вихрей  $(m, m)$

эквивалентна скалярному вихрю. Используя результаты раздела 7 о приведении матрицы линеаризованной задачи к блочно-диагональному виду, получаем, что задача устойчивости для трёхкомпонентной системы эквивалентна задаче устойчивости для двухкомпонентной системы.

В [41] изложены особенности неустойчивых собственных чисел для пар вихрей с удвоенным зарядом и проводится анализ бифуркационных диаграмм. Показано, что пара вихрей с  $m = 1$  спектрально стабильна в окрестности точки порога локальной бифуркации, но у неё существуют две пары потенциально неустойчивых собственных чисел: чисто мнимые собственные числа с отрицательной энергией при  $s = 1$  и два нулевых собственных числа при  $s = 2$ , где величина  $s$  возникает в разложении в ряды Фурье (7.11). По лемме 5 пара чисто мнимых собственных чисел при  $s = 1$  остаётся на мнимой оси. Анализ рядов возмущений и численные эксперименты в [41] показали, что двукратное нулевое собственное значение  $s = 2$  распадается в пару чисто мнимых собственных чисел с отрицательной энергией, и это приводит к неустойчивости вдали от точки порога локальной бифуркации. (Эта неустойчивость при  $s = 2$  была подтверждена численно в [39] (см. рис. 3), где рассматривалась полная трёхкомпонентная устойчивость без приведения матрицы линеаризованной системы к блочно-диагональному виду. В [39] также численно обнаружена слабая нестабильность при  $s = 1$ , что расходится с нашим анализом и численными результатами в [41]. Эта нестабильность — результат неточностей в численных экспериментах [39].)

Теперь мы рассмотрим линейную устойчивость пары вихрей  $(m, -m)$ , связанной с фундаментальным солитоном, и проанализируем их асимптотики. Добавим к разложению (7.1) разделение переменных

$$\begin{aligned} u_1 &= u_+(r)e^{-is\theta}, & u_2 &= v_+(r)e^{i(m-s)\theta}, & u_3 &= w_+(r)e^{-i(m+s)\theta}, \\ v_1 &= u_-(r)e^{-is\theta}, & v_2 &= v_-(r)e^{-i(m+s)\theta}, & v_3 &= w_-(r)e^{i(m-s)\theta} \end{aligned}$$

и перепишем линеаризованную задачу в окончательном виде:

$$\begin{aligned} i\lambda u_+ &= -\Delta_s u_+ + u_+ + V(r)u_+ + V_{11}(r)(u_+ + u_-) + \\ &\quad + V_{12}(\bar{\alpha}_2 v_+ + \alpha_2 v_- + \bar{\alpha}_3 w_+ + \alpha_3 w_-), \\ -i\lambda u_- &= -\Delta_s u_- + u_- + V(r)u_- + V_{11}(r)(u_+ + u_-) + \\ &\quad + V_{12}(\bar{\alpha}_2 v_+ + \alpha_2 v_- + \bar{\alpha}_3 w_+ + \alpha_3 w_-), \\ i\lambda v_+ &= -\Delta_{s-m} v_+ + \omega v_+ + V(r)v_+ + \alpha_2 V_{12}(r)(u_+ + u_-) + \\ &\quad + \alpha_2 V_{22}(\bar{\alpha}_2 v_+ + \alpha_2 v_- + \bar{\alpha}_3 w_+ + \alpha_3 w_-), \\ -i\lambda v_- &= -\Delta_{s+m} v_- + \omega v_- + V(r)v_- + \bar{\alpha}_2 V_{12}(r)(u_+ + u_-) + \\ &\quad + \bar{\alpha}_2 V_{22}(\bar{\alpha}_2 v_+ + \alpha_2 v_- + \bar{\alpha}_3 w_+ + \alpha_3 w_-), \\ i\lambda w_+ &= -\Delta_{s+m} w_+ + \omega w_+ + V(r)w_+ + \alpha_3 V_{12}(r)(u_+ + u_-) + \\ &\quad + \alpha_3 V_{22}(\bar{\alpha}_2 v_+ + \alpha_2 v_- + \bar{\alpha}_3 w_+ + \alpha_3 w_-), \\ -i\lambda w_- &= -\Delta_{s-m} w_- + \omega w_- + V(r)w_- + \bar{\alpha}_3 V_{12}(r)(u_+ + u_-) + \\ &\quad + \bar{\alpha}_3 V_{22}(\bar{\alpha}_2 v_+ + \alpha_2 v_- + \bar{\alpha}_3 w_+ + \alpha_3 w_-), \end{aligned}$$

здесь  $\Delta_s$  определяется из (7.12) и компоненты потенциалов суть

$$\begin{aligned} V &= W'(U^2 + R^2), & V_{11} &= W''(U^2 + R^2)U^2, \\ V_{12} &= W''(U^2 + R^2)UR, & V_{22} &= W''(U^2 + R^2)R^2. \end{aligned}$$

Вблизи порога локальной бифуркации при значении  $\varepsilon = 0$  в разложении по теории возмущений (8.7) линеаризованная задача имеет две пары чисто мнимых собственных чисел при  $\lambda = \pm i(1 - \omega_0)$  и  $s = \pm m$ , два двукратных нулевых собственных числа при  $s = \pm 2m$  и многократно вырожденное нулевое собственное число при  $s = 0$ . Вырожденное нулевое собственное число при  $s = 0$  определяется симметриями системы НУШ (2.1) и остаётся равным нулю за точкой порога локальной бифуркации. Поведение двух пар чисто мнимых собственных чисел при  $s = \pm m$  определяется леммой 5; они остаются нейтрально устойчивыми позади точки порога локальной бифуркации. Два двукратных нулевых собственных числа при  $s = \pm 2m$  могут распадаться в неустойчивые собственные числа, как это было в случае связанных двухкомпонентных состояний солитон-вихрь [41]. Поэтому далее рассмотрим разделение этих собственных чисел и последствия этого процесса в контексте устойчивости связанного трёхкомпонентного состояния солитон-вихрь.

Построим ряд теории возмущений для решения линеаризованной задачи при  $s = 2m$  вблизи порога локальной бифуркации:

$$\begin{aligned} u_{\pm} &= \varepsilon u_1^{\pm}(r) + O(\varepsilon^3), & \lambda &= \varepsilon^2 \lambda_2 + O(\varepsilon^4), \\ v_+ &= c_2 \phi_1(r) + \varepsilon^2 v_2^+(r) + O(\varepsilon^4), & v_- &= \varepsilon^2 v_2^-(r) + O(\varepsilon^4), \\ w_+ &= \varepsilon^2 w_2^+(r) + O(\varepsilon^4), & w_- &= c_3 \phi_1(r) + \varepsilon^2 w_2^-(r) + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

где  $(c_2, c_3) \in \mathbb{C}^2$  — координаты на двумерном ядре линеаризованной системы при  $s = 2m$ . Линейная неоднородная система для  $u_1^{\pm}(r)$  в порядке  $O(\varepsilon)$  имеет неявно заданное решение  $u_1^{\pm}(r) = (\bar{\alpha}_2 c_2 + \alpha_3 c_3) \tilde{u}_2(r)$ , где  $\tilde{u}_2(r)$  находится из линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Delta_{2m} \tilde{u}_2 - \tilde{u}_2 - W'(u_0^2) \tilde{u}_2 - 2W''(u_0^2) u_0^2 \tilde{u}_2 = W''(u_0^2) u_0 \phi_1^2.$$

Линейная неоднородная система относительно  $v_2^+(r)$  и  $w_2^-(r)$  в порядке  $O(\varepsilon^2)$  разрешима ввиду условий

$$i\lambda_2 x_1 = -\mu C_0 x_1, \quad i\lambda_2 x_2 = -C_0 x_1, \quad (8.9)$$

где

$$x_1 = \bar{\alpha}_2 c_2 + \alpha_3 c_3, \quad x_2 = \bar{\alpha}_2 c_2 - \alpha_3 c_3$$

и константа  $C_0$  определяется из соотношения

$$C_0 \int_0^{\infty} \phi_1^2(r) r dr = \int_0^{\infty} W''(u_0^2) (2u_0 \tilde{u}_2 + \phi_1^2) \phi_1^2 r dr$$

(используется уравнение (8.8)). В редуцированной спектральной задаче (8.9) имеются два собственных числа  $\lambda_2 = i\mu C_0$  и  $\lambda_2 = 0$ . Нулевое собственное число сохраняется при  $\lambda = 0$ , причиной тому — трансляция пары вихрей (8.4) со



скрытым зарядом вдоль произвольного параметра сдвига  $\mu$ . При  $\mu \neq 0$  ненулевое собственное число является чисто мнимым вблизи точки порога локальной бифуркации. (При  $s = -2m$  существует другое чисто мнимое собственное число  $\lambda_2 = -i\mu C_0$ .) Пара чисто мнимых собственных чисел имеет отрицательную энергию, как и в случае скалярного вихря в [41], который соответствует здесь  $\mu = \pm 1$ . Следовательно, эта пара будет приводить к неустойчивости вдали от порога локальной бифуркации, когда пара сталкивается либо с собственными числами с положительной энергией, либо с непрерывным спектром линеаризованной задачи.

Когда  $\mu = 0$ , собственное число  $\lambda_2 = i\mu C_0$  равно нулю. Этот дополнительный нуль сохраняется, так как обобщённое ядро линеаризованной системы в случае  $s = 2m$  становится двумерным при  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{2}$ . В самом деле, собственный вектор линеаризованной задачи для  $\lambda = 0$ , имеющий вид

$$u_+ = u_- = v_- = w_+ = 0, \quad v_+ = -w_- = R(r),$$

удовлетворяет условиям альтернативы Фредгольма для обобщённого ядра. Следовательно, нулевые собственные числа при  $s = \pm 2m$  остаются нулевыми для симметричной пары вихрей со скрытым зарядом (при  $\mu = 0$ ), в том числе и за точкой порога локальной бифуркации.

И наконец, опишем особенности неустойчивых собственных чисел для связанных состояний, образованных фундаментальными солитонами и парами вихрей со скрытым зарядом ( $m = 1$ ). Так как перед порогом локальной бифуркации больше нет потенциально неустойчивых собственных чисел [41], приведённый выше анализ гарантирует устойчивость в окрестности порога локальной бифуркации. Кроме того, доказано, что потенциально нестабильные собственные числа при  $s = \pm 1$  и  $s = \pm 2$  не приводят к неустойчивости симметричной пары вихрей при  $\mu = 0$  вдали от порога локальной бифуркации. Этот анализ возмущений поясняет основной вывод в работах [9, 42]: вихри со скрытым зарядом более устойчивы при образовании связанных состояний с фундаментальным солитоном, нежели пары вихрей с двойным зарядом. Данный результат также согласуется с численными результатами [39], приведёнными на рис. 3: при  $s = 2$  не обнаружено неустойчивости. (Слабая неустойчивость при  $s = 1$  в [39] — снова привнесённый результат, порождённый неточностью численных методов.)

Изложенные выше результаты не исключают других механизмов возникновения неустойчивости вдали от порога бифуркации. На рис. 4 изображены неустойчивые собственные числа связанного состояния, образованного фундаментальным солитоном и парами вихрей со скрытым и удвоенным зарядами при  $\sigma = 0,5$ . Неустойчивое собственное число для пары вихрей с удвоенным зарядом  $m = 1$  соответствует  $s = 2$  согласно сказанному выше (эта часть графика опубликована в [41]). Неустойчивое собственное число для пары со скрытым зарядом  $m = 1$  соответствует  $s = 3$  (эта часть графика согласуется с [39, рис. 3]).

Неустойчивые собственные числа для пары вихрей с удвоенным зарядом  $m = 1$  комплексны. Они появляются из непрерывного спектра при  $\omega \approx 0,41$

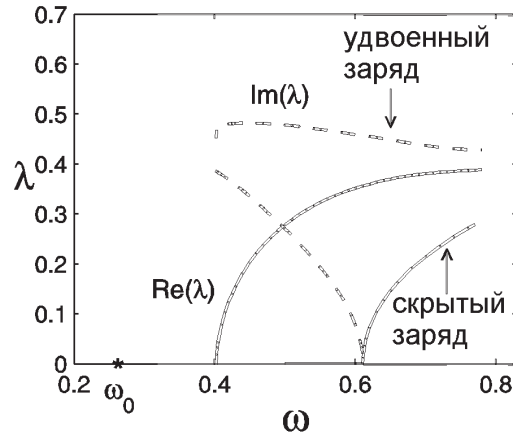


Рис. 4. Неустойчивые собственные числа связанного состояния, образованного фундаментальным солитоном и парой вихрей с удвоенным и скрытым зарядами при значении  $\sigma = 0,5$

и существуют для  $\omega > 0,41$ . Неустойчивые собственные числа для симметричной пары вихрей со скрытым зарядом  $m = 1$  вещественны. Два вещественных собственных числа сливаются в начале координат при  $\omega \approx 0,61$  и становятся парой чисто мнимых собственных чисел при  $\omega < 0,61$ . В окрестности значения  $\omega \approx 0,39$  пара чисто мнимых комплексных чисел сливается с непрерывным спектром и исчезает.

Из рис. 4 очевидно, что вихри со скрытым зарядом устойчивее вихрей с удвоенным зарядом по двум причинам. Во-первых, интервал устойчивости вихрей со скрытым зарядом  $\omega_0 < \omega < 0,61$  шире, чем интервал устойчивости вихрей с удвоенным зарядом  $\omega_0 < \omega < 0,41$ , где  $\omega_0 = 0,26$  — точка порога локальной бифуркации при  $\sigma = 0,5$ . Во-вторых, показатели роста в вихрях со скрытым зарядом меньше, чем в вихрях с удвоенным зарядом — в случаях, когда оба типа вихрей нестабильны.

Эволюция неустойчивых вихрей вдали от точки порога локальной бифуркации уже рассматривалась в литературе. Пара вихрей с удвоенным зарядом либо распадается во вращающееся дипольное решение, либо разделяется на два удаляющихся друг от друга фундаментальных солитона (см. [41, рис. 7 и 8]). Связанное состояние из фундаментального солитона и пары вихрей со скрытым зарядом распадается на три разлетающихся солитона (см. [39, рис. 8]). Причина такого различия в поведении довольно проста: у вихрей со скрытым зарядом суммарный угловой момент равен нулю. Вследствие сохранения углового момента исходной системы НУШ осколки не вращаются. И наоборот, у вихрей с удвоенным зарядом суммарный угловой момент отличен от нуля, и потому осколки должны вращаться. Нулевой угловой момент для вихрей со скрытым зарядом — физическая причина того, что неустойчивые собственные числа соответствующей линеаризованной задачи вещественны, а не комплексны.

## 9. Заключение

Несмотря на то что модель с чисто некогерентной связью между нелинейными модами является лишь приближением реальной физической модели, она важна с точки зрения теории возмущений. В случае возникновения частичной когерентности, разрушающей симметрии вращения системы НУШ, нулевые собственные числа, соответствующие дополнительной группе симплектических вращений, уходят в комплексную область. Семейство вихревых решений может допускать различные бифуркации, которые можно исследовать, используя теорию Ляпунова—Шмидта. В контексте этих задач результаты данной работы являются необходимым шагом в построении и анализе рядов теории возмущений. Пример использования таких рядов содержится в [30].

А. С. Десятников и Д. Е. Пелиновский благодарны Юрию Кившарю за ценные обсуждения. Данное исследование было начато во время пребывания Д. Е. Пелиновского в Австралийском национальном университете в декабре 2004 г. Работа А. С. Десятникова была поддержана Австралийским советом по науке и Австралийским национальным университетом. Исследования Д. Е. Пелиновского поддержаны премией премьер-министра канадской провинции Онтарио за выдающиеся исследования (PREA) и грантом Совета по естественным наукам и исследованиям Канады (NSERC). Работа Дж. Янг поддержана Национальным научным фондом США (NSF).

## Литература

- [1] Манаков С. В. К теории двумерных стационарных самофокусирующихся электромагнитных волн // Журн. эксперимент. и теор. физ. — 1974. — Т. 38. — С. 248—253.
- [2] Ahles M., Motzek K., Stepken A., Kaiser F., Weilnau C., Denz C. Stabilization and breakup of coupled dipole-mode beams in an anisotropic nonlinear medium // J. Optical Soc. Amer. B. — 2002. — Vol. 19. — P. 557—562.
- [3] Anastassiou C., Soljacic M., Segev M., Eugenieva E. D., Christodoulides D. N., Kip D., Musslimani Z. H., Torres J. P. Eliminating the transverse instabilities of Kerr solitons // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 85. — P. 4888—4891.
- [4] Berge L. Wave collapse in physics: Principles and applications to light and plasma waves // Phys. Rep. — 1998. — Vol. 303. — P. 260—370.
- [5] Bigelow M. S., Park Q. H., Boyd R. W. Stabilization of the propagation of spatial solitons // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 66. — P. 046631.
- [6] Briedis D., Petersen D. E., Edmundson D., Krolikowski W., Bang O. Ring vortex solitons in nonlocal nonlinear media // Optics Express. — 2005. — Vol. 13. — P. 435.
- [7] Christodoulides D. N., Coskun T. H., Mitchell M., Segev M. Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78. — P. 646—649.
- [8] Desyatnikov A. S., Kivshar Yu. S. Necklace-ring vector solitons // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87. — P. 033901.

- [9] Desyatnikov A. S., Kivshar Yu. S., Motzek K., Kaiser F., Weilnay C., Denz C. Multicomponent dipole-mode spatial solitons // *Optics Lett.* — 2002. — Vol. 27. — P. 634–636.
- [10] Desyatnikov A. S., Kivshar Yu. S., Torner L. Optical vortices and vortex solitons // *Progress in Optics*. Vol. 47 / E. Wolf, ed. — Amsterdam: Elsevier, 2005. — P. 219–319.
- [11] Desyatnikov A. S., Mihalache D., Mazilu D., Malomed B. A., Denz C., Lederer F. Two-dimensional solitons with hidden and explicit vorticity in bimodal cubic-quintic media // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 026615.
- [12] Desyatnikov A. S., Neshev D., Ostrovskaya E. A., Kivshar Yu. S., Krolikowski W., Luther-Davies B., Garcia-Ripoll J. J., Perez-Garcia V. M. Multipole spatial vector solitons // *Optics Lett.* — 2001. — Vol. 26. — P. 435–437.
- [13] Desyatnikov A. S., Neshev D., Ostrovskaya E. A., Kivshar Yu. S., McCarthy G., Krolikowski W., Luther-Davies B. Multipole composite spatial solitons: Theory and experiment // *J. Optical Soc. Amer. B.* — 2002. — Vol. 19. — P. 586.
- [14] Fetter A. L., Svidzinsky A. A. Vortices in a trapped dilute Bose–Einstein condensate // *J. Physics: Condensed Matter.* — 2001. — Vol. 13. — P. R135–R194.
- [15] Firth W. J., Skryabin D. V. Optical solitons carrying orbital angular momentum // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79. — P. 2450.
- [16] Garcia-Ripoll J. J., Perez-Garcia V. M., Ostrovskaya E. A., Kivshar Yu. S. Dipole-mode vector solitons // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — P. 82–85.
- [17] Jeng C. C., Shih M. F., Motzek K., Kivshar Yu. Partially incoherent optical vortices in self-focusing nonlinear media // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 043904–4.
- [18] Kivshar Yu. S., Agrawal G. P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals.* — San Diego: Academic Press, 2003.
- [19] Mamaev A. V., Saffman M., Zozulya A. A. Propagation of a mutually incoherent optical vortex pair in anisotropic nonlinear media // *J. Optics B.* — 2004. — Vol. 6. — P. S318.
- [20] Meyer K. R., Hall G. R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* — New York: Springer, 1992.
- [21] Mihalache D., Mazilu D., Towers I., Malomed B. A., Lederer F. Stable two-dimensional spinning solitons in a bimodal cubic-quintic model with four-wave mixing // *J. Optics A.* — 2002. — Vol. 4. — P. 615.
- [22] Motzek K., Kaiser F., Chu W. H., Shih M. F., Kivshar Yu. S. Soliton transverse instabilities in anisotropic nonlocal self-focusing media // *Optics Lett.* — 2004. — Vol. 29. — P. 280–282.
- [23] Motzek K., Kaiser F., Weillnau C., Denz C., McCarthy G., Krolikowski W., Desyatnikov A., Kivshar Yu. S. Multi-component vector solitons in photorefractive crystals // *Optics Comm.* — 2002. — Vol. 209. — P. 501–506.
- [24] Motzek K., Kivshar Yu. S., Shih M. F., Swartzlander G. A. Spatial coherence singularities and incoherent vortex solitons // *J. Optical Soc. Amer. B.* — 2005. — Vol. 22. — P. 1437–1442.
- [25] Musslimani Z. H., Segev M., Christodoulides D. N. Multicomponent two-dimensional solitons carrying topological charges // *Optics Lett.* — 2000. — Vol. 25. — P. 61.
- [26] Musslimani Z. H., Segev M., Christodoulides D. N., Soljacic M. Composite multihump vector solitons carrying topological charge // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 84. — P. 1164–1167.

- [27] Nye J. F., Berry M. V. Dislocations in wave trains // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.* — 1974. — Vol. 336. — P. 165–190.
- [28] *Optical Vortices* / M. Vashnetsov, K. Staliunas, eds. — Huntington: Nova Science, 1999. — (Horizons in World Physics; Vol. 228).
- [29] Palacios D. M., Maleev I. D., Marathay A. S., Swartzlander G. A. Spatial correlation singularity of a vortex field // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 143905–4.
- [30] Park Q. H., Eberly J. H. Nontopological vortex in a two-component Bose–Einstein condensate // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Vol. 70. — P. 021602(R).
- [31] Pego R. L., Warchall H. A. Spectrally stable encapsulated vortices for nonlinear Schrödinger equations // *J. Nonlinear Sci.* — 2002. — Vol. 12. — P. 347–394.
- [32] Skryabin D. V., McSloy J. M., Firth W. J. Stability of spiralling solitary waves in Hamiltonian systems // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 66. — P. 055602-4.
- [33] Soljacic M., Sears S., Segev M. Self-trapping of “necklace” beams in self-focusing Kerr media // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 4851–4854.
- [34] Soljacic M., Segev M. Self-trapping of “necklace-ring” beams in self-focusing Kerr media // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 62. — P. 2810–2820.
- [35] Soljacic M., Segev M. Integer and fractional angular momentum borne on self-trapped necklace-ring beams // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 420–423.
- [36] Soskin M. S., Vashnetsov M. V. Singular optics // *Progress in Optics*. Vol. 42 / E. Wolf, ed. — Amsterdam: Elsevier, 2001. — P. 219–276.
- [37] Sulem C., Sulem P. L. *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse.* — New York: Springer, 1999.
- [38] Vuong L. T., Grow T. D., Ishaaya A., Gaeta A. L., Hoofst G. W., Eliel E. R., Fibich G. Collapse of optical vortices // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — In press.
- [39] Wang J., Ye F., Dong L., Zai T., Li Y. P. Composite vector solitons with topological charges and their stability analysis // *Proc. SPIE.* — 2005. — Vol. 5646. — P. 6–16.
- [40] Yakimenko A. I., Zaliznyak Yu. A., Kivshar Yu. S. Stable vortex solitons in nonlocal self-focusing nonlinear media // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 065603.
- [41] Yang J., Pelinovsky D. E. Stable vortex and dipole vector solitons in a saturable nonlinear medium // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 67. — P. 016608.
- [42] Ye F., Wang J., Dong L., Li Y.-P. Suppression of modulational instability of ring vector solitons // *Optics Comm.* — 2004. — Vol. 230. — P. 219–223.

