ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 122, № 1
январь, 2000

 Д. Е. Пелиновский*, К. Салем*

Асимптотики нового собственного значения в линейных задачах без порога

Исследуется критерий появления нового собственного значения в линейной спектральной задаче, соответствующей промежуточному уравнению длинных волн. Методом фурье-разложения вычисляется асимптотика нового собственного значения в пределе малого потенциала. Результаты сравниваются с аналогичными результатами для оператора Шредингера с радиально-симметричным потенциалом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что у оператора Шредингера $\mathcal{L} = -\nabla_d^2 + \epsilon v(r)$ при малой константе связи $\epsilon \ll 1$ может существовать слабо связанное состояние $\mathcal{L}\Phi_b = \lambda_b\Phi_b$, где $\lambda = \lambda_b(\epsilon) < 0$ [1]. Оно заведомо существует в одномерном и двумерном случаях, если полная масса

$$M \propto \int_0^\infty r^{d-1} v(r)\, dr$$

потенциала $v = v(r)$ отрицательна [2]. Методами операторного анализа были изучены аналитические свойства функции $\lambda = \lambda_b(\epsilon)$ [3]; позднее эти результаты были обобщены на случай $\lambda = \lambda_b(\epsilon - \epsilon_0)$, где ϵ_0 – пороговое значение [4]. Недавно с помощью интегрального представления Апенко получил [5] асимптотики нового собственного значения для случая $d \geqslant 2$.

Развитый для оператора Шредингера анализ был ограничен самосопряженными дифференциальными операторами второго порядка. В связи с теориями солитонов изучались также и другие линейные задачи на собственные значения, например задачи, связанные с матричными несамосопряженными дифференциальными операторами [6, 7], или дифференциальные спектральные задачи Римана–Гильберта [8].

В настоящей работе мы предлагаем простой асимптотический подход, основанный на фурье-разложении собственных функций слабо связанных состояний, и находим асимптотики новых собственных значений в некоторых линейных задачах. Используемый при этом метод известен в квантовой механике как борновское приближение для амплитуды волны, рассеянной на малом потенциале (см. [2, гл. XVII, п. 130]).

* Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada

Метод применяется для описания рождения солитонов в системе, описываемой промежуточным уравнением длинных волн

$$u_t + \delta^{-1} u_x + 2\epsilon u u_x + T(u_{xx}) = 0, \tag{1}$$

где δ – параметр, $T(u)$ – сингулярный интегродифференциальный оператор

$$T(u) = \frac{1}{2\delta} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi(z-x)}{2\delta}\right] u(z)\, dz$$

и $\epsilon \ll 1$. Этому уравнению соответствует следующая линейная задача на собственные значения [9]:

$$i w_x^+ + \left(q(k) + \frac{1}{2\delta}\right)(w^+ - w^-) + \epsilon u(x) w^+ = 0, \tag{2}$$

где

$$q(k) = k \frac{\exp(2k\delta)}{\operatorname{sh}(2k\delta)} - \frac{1}{2\delta}, \tag{3}$$

k – спектральный параметр, а $w^{\pm} = w(x \mp i\delta)$. В работе [10] изучалось рождение солитонов большим начальным импульсом ($\epsilon \gg 1$). В данной работе анализируется противоположный случай. Показано, что при $k = i\kappa(\epsilon)$ и $\epsilon \to 0$ слабо связанное состояние всегда существует, если масса

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dx \tag{4}$$

строго положительна. Это связанное состояние отвечает солитону промежуточного уравнения длинных волн (1), генерируемому малым начальным импульсом.

В пределе $\delta \to 0$ справедливо следующее разложение:

$$T(u_x) + \delta^{-1} u = \frac{\pi}{4\delta^2} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(z) - u(x)}{\operatorname{sh}^2\left[\frac{\pi(z-x)}{2\delta}\right]}\, dz = \frac{\delta}{\pi^2} u_{xx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2\, dz}{\operatorname{sh}^2(z)} + O(\delta^3),$$

где последний интеграл равен $\pi^2/3$ [11]. Тогда промежуточное уравнение длинных волн (1) сводится к уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$3u_t + 6\epsilon u u_x + \delta u_{xxx} = 0, \tag{5}$$

которому соответствует одномерный оператор Шредингера

$$\delta(w_{xx} - 2ikw_x) + \epsilon u(x) w = 0. \tag{6}$$

В этом пределе новое собственное значение $k = i\kappa(\epsilon)$ имеет асимптотику вида

$$\kappa(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2\delta} M + O(\epsilon^2),$$

где $M > 0$. Оказывается, что новое собственное значение линейной задачи (2) при конечном δ имеет асимптотику такого же вида, т.е. $\kappa(\epsilon) \sim O(\epsilon)$. В пределе $\delta \to \infty$, когда промежуточное уравнение длинных волн переходит в уравнение Бенджамина–Оно (БО) [9], величина $\kappa(\epsilon)$ как функция ϵ экспоненциально мала, т.е. $\kappa \sim O(\exp(-2\pi\epsilon^{-1}M^{-1}))$, где $M > 0$ [8]. Таким образом, при любом значении δ в спектральной задаче (2) не существует порогового значения амплитуды ϵ потенциала, при котором появляется новое связанное состояние. Это означает, что для промежуточного уравнения длинных волн (1), так же как и для его предельных случаев, уравнений КдФ и БО, любой начальный импульс с положительной массой M с течением времени превращается в солитон.

Этот результат сравнивается с результатом анализа d-мерного оператора Шредингера с радиально-симметричным потенциалом

$$\phi_{rr} + \frac{d-1}{r}\phi_r + k^2\phi + \epsilon u(r)\phi = 0, \quad r \geqslant 0, \tag{7}$$

где k – спектральный параметр. Мы исследуем разложение Фурье–Бесселя слабо связанного состояния и показываем, что в спектральной задаче (7) при $0 < d \leqslant 2$ не существует порога по ϵ для возникновения нового связанного состояния. При $0 < d < 2$ для нового собственного значения $k = i\kappa(\epsilon)$ получена асимптотика вида $\kappa \sim O(\epsilon^{1/(d-2)})$. Таким образом, в линейной задаче (7) собственное значение $k = i\kappa(\epsilon)$ не является, вообще говоря, аналитической функцией ϵ, в то время как в линейной задаче (2) оно является аналитической функцией при любом конечном значении δ. При $d = 1$ результат сводится к зависимости $\kappa \sim O(\epsilon)$. При $d \to 2^-$ функция $\kappa(\epsilon)$ становится экспоненциально малой по ϵ, т.е. $\kappa \sim O(\exp(-2\pi\epsilon^{-1}M^{-1}))$, где $M > 0$ – полная масса потенциала. При $d = 2$ наш подход позволяет вычислить предэкспоненциальный фактор. Последний результат дополняет недавний анализ Апенко [5], который рассматривал задачу (7) при $d > 2$, когда новое собственное значение возникает при $\epsilon > \epsilon_0$, где ϵ_0 – пороговое значение. Он также вычислил предэкспоненциальный фактор в пределе $d \to 2^+$.

2. ПРОМЕЖУТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН

Мы рассматриваем линейную задачу (2) при конечном δ как дифференциально-разностную задачу в комплексной плоскости x. При $\epsilon = 0$ имеются два решения: $M^{\pm}(x,k) = 1$ и $N^{\pm}(x,k) = e^{2ik(x\mp i\delta)}$. Мы строим решение уравнения (2) при $q = q(i\kappa(\epsilon))$ и $0 < \epsilon \ll 1$ в виде разложения Фурье по собственным функциям $N^{\pm}(x,k)$:

$$w^{\pm}(x) = \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} \alpha(k) e^{2ik(x\mp i\delta)}\, dk, \tag{8}$$

где $\alpha(k)$ – коэффициенты Фурье, а сдвиг $k \to k + i0$ пределов интегрирования гарантирует, что собственные функции $w^{\pm}(x)$ обращаются в нуль при $x \to +\infty$ (в противном случае связанное состояние не будет локализованным). При подстановке (8) в уравнение (2) последнее сводится к интегральному уравнению

$$\beta(k) = \frac{\epsilon}{4\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + 2\delta q(k'))K(k,k')\beta(k')\, dk'}{(k' + i0)(q(k') - q(i\kappa))}, \tag{9}$$

где

$$\beta(k) = \frac{ke^{2k\delta}(q(k) - q(i\kappa))}{(q(k) + (2\delta)^{-1})}\alpha(k)$$

и

$$K(k, k') = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{2i(k'-k)x}\,dx.$$

Интегральное уравнение (9) сингулярно при $k' \to 0$, если $q(i\kappa) \to 0$, т.к. асимптотическое разложение для $q(k)$ при $k \to 0$ имеет вид

$$q(k) = k + \frac{2}{3}k^2\delta + O(k^3\delta^2). \tag{10}$$

Чтобы получить правильный предел для (9) при $\epsilon \to 0$, мы вычисляем полюсные вклады при $k' = -i0$ и $k' = i\kappa$ и переписываем уравнение (9) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}\beta(k) = {}& \frac{\epsilon K(k,0)\beta(0)}{4\delta\kappa}\left[\frac{1+2\delta q(i\kappa)}{q'(i\kappa)} + \frac{i\kappa}{q(i\kappa)}\right] + \frac{\epsilon}{4\pi\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{(k'+i0)(k'-i\kappa)}\times \\ & \times\left[\frac{(1+2\delta q(k'))(k'-i\kappa)}{q(k')-q(i\kappa)}K(k,k')\beta(k')- \right. \\ & \left. -\left(\frac{i\kappa}{q(i\kappa)} + \frac{k'(1+2\delta q(i\kappa))}{i\kappa q'(i\kappa)} - \frac{k'}{q(i\kappa)}\right)K(k,0)\beta(0)\right],\end{aligned} \tag{11}$$

где $q'(k) = dq(k)/dk$ и принято, что $\kappa(\epsilon) > 0$. Из первого члена уравнения (11) ясно, что асимптотический баланс достигается при $\kappa \sim O(\epsilon)$. Поэтому мы полагаем, что справедливо разложение $\kappa = \epsilon\kappa_1 + \epsilon^2\kappa_2 + O(\epsilon^3)$, так что в пределе $\epsilon \to 0$ уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned}\beta(k) = {}& \frac{K(k,0)\beta(0)}{2\delta\kappa_1}\left(1 - \epsilon\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) + \\ & + \frac{\epsilon}{4\pi\delta}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{k'^2}\left[\frac{k'(1+2\delta q(k'))}{q(k')}K(k,k')\beta(k') - K(k,0)\beta(0)\right] + O(\epsilon^2).\end{aligned} \tag{12}$$

Из условия совместности уравнения (12) при $k = 0$ следует асимптотическое разложение для $\beta(k)$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\delta}M, \tag{13}$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{8\pi\delta^2}\iint_{-\infty}^{\infty} u(x)u(y)Q(x-y)\,dx\,dy, \tag{14}$$

где M определяется соотношением (4), а

$$Q(z) = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k^2}\left[\frac{k}{q(k)}e^{2ikz} - 1\right].$$

Формула для $\kappa(\epsilon)$ справедлива при условии, что $\kappa_1 > 0$ (т.е. $M > 0$) и что величина κ_2 конечна (необходимое условие сходимости разложения). В пределе $\delta \to 0$ с помощью равенства

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2}(e^{2ikz} - 1) = -|z|$$

соотношение (14) упрощается до

$$\kappa_2 = -\frac{1}{4\delta^2}\iint_{-\infty}^{\infty} u(x)u(y)|x-y|\,dx\,dy. \tag{15}$$

Последнее выражение описывает поправку к новому собственному значению одномерного опратора Шредингера, т.е. уравнения (6) (см. также [3]). С помощью теоремы о вычетах функцию $Q(z)$ в (14) при конечном δ можно формально представить в виде суммы ведущего члена $-2\pi|z|$ и вкладов от бесконечного числа полюсов, отвечающих нулям $q(k)$ при $\mathrm{Im}(k) > 0$ [9]. Соответственно асимптотика нового собственного значения промежуточного уравнения длинных волн имеет вид

$$\kappa(\epsilon) = \frac{\epsilon M}{2\delta}\left[1 + O(\epsilon)\right],$$

где $M > 0$. В пределе $\delta \to \infty$, когда промежуточное уравнение длинных волн переходит в уравнение БО, коэффициенты κ_1, κ_2, так же как и высшие члены разложения, обращаются в нуль. В этом случае собственное значение $\kappa(\epsilon)$ спектральной задачи для промежуточного уравнения длинных волн (2) переходит в собственное значение уравнения БО нетривиальным образом. Этот переход выходит за рамки асимптотического разложения по степеням ϵ.

Чтобы воспроизвести результаты решения спектральной задачи для уравнения БО, заметим, что собственное значение $q(i\kappa)$, определяемое формулой (3), не является хорошо определенной величиной в пределе $\delta \to \infty$, если не потребовать [9, 10], чтобы

$$\kappa = \frac{\pi}{2\delta}\left(1 + \frac{1}{4\delta k_0}\right), \tag{16}$$

где k_0 – параметр. Тогда получаются следующие разложения $q(i\kappa)$ и $q(k)$ при больших δ:

$$q(i\kappa) = 2k_0 + O(\delta^{-1}), \tag{17}$$

$$q(k) = 2k\Theta(k) + O(\delta^{-1}), \tag{18}$$

где $\Theta(k)$ – функция Хевисайда: $\Theta(k) = 1$ при $k > 0$ и $\Theta(k) = 0$ при $k < 0$. Действительный отрицательный параметр $k_0(\epsilon)$ определяет собственное значение уравнения БО, которое экспоненциально мало по ϵ [8]. С учетом формул (17) и (18) интегральное уравнение (9) в пределе $\delta \to \infty$ принимает вид

$$\beta(k) = \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{K(k,k')\beta(k')\,dk'}{(k' - k_0)}, \qquad k \geqslant 0. \tag{19}$$

Интеграл в правой части (19) сингулярен при $k_0 \to 0$ из-за наличия точки ветвления при $k' \to 0$. Полагая $k_0 = -p(\epsilon)$, представим уравнение (19) в виде

$$(20)\beta(k) = -\frac{\epsilon}{2\pi}\ln\left(\frac{p}{1+p}\right)K(k,0)\beta(0)+ \\ +\frac{\epsilon}{2\pi}\left[\int_0^1 \frac{K(k,k')\beta(k')-K(k,0)\beta(0)}{(k'+p)}\,dk' + \int_1^\infty \frac{K(k,k')\beta(k')}{(k'+p)}\,dk'\right].$$

Условие асимптотического баланса удовлетворяется, если $\ln p \sim O(\epsilon^{-1})$. Следовательно, можно написать $\ln p = -\epsilon^{-1}p_{-1} + p_0 + O(\epsilon)$, где $p_{-1} > 0$, и рассмотреть в уравнении (20) предел $p \to 0$. Полагая $k = 0$, находим явные выражения:

$$p_{-1} = \frac{2\pi}{M}, \tag{21}$$

$$p_0 = -\gamma - \ln 2 - \frac{1}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty} u(x)u(y)\ln|x-y|\,dx\,dy, \tag{22}$$

где $\gamma \approx 0.577$ – константа Эйлера; при вычислении интегралов мы воспользовались формулами (3.721) и (3.782) из [11]:

$$\int_0^1 \frac{e^{2ikz}-1}{k}\,dk + \int_1^\infty \frac{e^{2ikz}}{k}\,dk = -\gamma - \ln 2 - \ln|z| + \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}(z).$$

Таким образом, асимптотика собственного значения уравнения БО имеет вид

$$k_0(\epsilon) = -c\exp(-2\pi\epsilon^{-1}M^{-1})\left[1+O(\epsilon)\right],$$

где $c = \exp(p_0)$ и $M > 0$. Из (16) следует, что при больших, но конечных δ, собственное значение $\kappa(\epsilon)$ экспоненциально велико по ϵ. Это означает, что пределы $\delta \to \infty$ и $\epsilon \to 0$ нельзя переставлять.

3. d-МЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

Подстановкой $\phi(r) = r^{-\nu}\psi(r)$, где $\nu = (d-2)/2$, уравнение (7) сводится к уравнению Бесселя с потенциалом $u(r)$

$$\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\psi + \epsilon u(r)\psi = 0. \tag{23}$$

При $\epsilon = 0$ существуют два независимых решения: $\psi = J_\nu(kr)$ и $\psi = N_\nu(kr)$, оба решения осциллируют на бесконечности (см. [11, формула (8.451)]). Будем строить решение уравнения (23) при $k = i\kappa(\epsilon)$ и $0 < \epsilon \ll 1$ в виде разложения Фурье–Бесселя

$$\psi = \int_0^\infty k\alpha(k)J_\nu(kr)\,dk. \tag{24}$$

Используя формулу ортогональности

$$k \int_0^\infty r J_\nu(kr) J_\nu(k'r)\, dr = \delta(k-k'),$$

сводим уравнение (23) к интегральному уравнению

$$(k^2+\kappa^2)\alpha(k) = \epsilon \int_0^\infty k' K(k,k')\alpha(k')\, dk', \tag{25}$$

где

$$K(k,k') = \int_0^\infty r u(r) J_\nu(kr) J_\nu(k'r)\, dr.$$

Асимптотика функции Бесселя $J_\nu(z)$ при $z \to 0$ имеет вид

$$J_\nu(z) \to \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$$

(см. [11, формула (8.440)]). Исследуем поведение уравнения (25) при $k, k' \to 0$, выделяя масштабные множители:

$$\alpha(k) = \frac{k^\nu \beta(k)}{k^2+\kappa^2}, \qquad K(k,k') = k^\nu k'^\nu \Pi(k,k'). \tag{26}$$

При $\kappa(\epsilon) \to 0$ интеграл в правой части (25) с учетом (26) оказывается сингулярным при $k' \to 0$, если $\nu \leqslant 0$ или эквивалентно $d \leqslant 2$. В этом случае при $\epsilon \to 0$ самосогласованное асимптотическое решение для нового связанного состояния существует. Полагая $\kappa(\epsilon) > 0$, преобразуем уравнения (25) и (26) при $0 < d < 2$ к виду

$$\beta(k) = \frac{\epsilon \kappa^{d-2}\pi}{2\sin(\pi\frac{d}{2})}\Pi(k,0)\beta(0) + \epsilon \int_0^\infty \frac{k'^{d-1}\, dk'}{k'^2+\kappa^2}\left[\Pi(k,k')\beta(k') - \Pi(k,0)\beta(0)\right], \tag{27}$$

при этом мы воспользовались формулой (3.241) из [11]:

$$\int_0^\infty \frac{z^{d-1}\, dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2\sin(\pi\frac{d}{2})}, \qquad 0 < d < 2.$$

Из уравнения (27) следует, что асимптотический баланс достигается при $\epsilon\kappa^{d-2} \sim O(1)$, поэтому мы полагаем $\kappa^{2-d} = \epsilon\kappa_1 + \epsilon^2\kappa_2 + O(\epsilon^3)$. Условия совместности уравнения (27) приводят к следующим выражениям для κ_1, κ_2:

$$\kappa_1 = \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{2^{d-1}\Gamma(\frac{d}{2})} N_d, \tag{28}$$

$$\kappa_2 = \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{2^{d-1}\Gamma(\frac{d}{2})} \iint_0^\infty r^{\frac{d}{2}} R^{\frac{d}{2}} u(r) u(R) Q(r,R)\, dr\, dR, \tag{29}$$

где

$$N_d = \int_0^\infty r^{d-1} u(r)\, dr,$$
$$Q(r,R) = \lim_{\kappa\to 0} \int_0^\infty \frac{k\, dk}{k^2+\kappa^2} \left[J_\nu(kr) J_\nu(kR) - \frac{k^{2\nu} r^\nu R^\nu}{2^{2\nu}\left[\Gamma(1+\nu)\right]^2} \right],$$

при этом мы использовали соотношение

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Необходимым условием положительности параметра $\kappa(\epsilon)$ является условие $N_d > 0$ (т.е. $\kappa_1 > 0$). Чтобы проверить конечность коэффициента κ_2, мы вычислим его явно. Воспользовавшись формулами (6.577), (8.445) и (8.485) из [11], находим для $Q(r,R)$ при $R > r$

$$Q(r,R) = \lim_{\kappa\to 0+} \left[I_\nu(\kappa r) K_\nu(\kappa R) - \frac{\kappa^{2\nu} r^\nu R^\nu \pi}{2^{2\nu+1}\left[\Gamma(1+\nu)\right]^2 \sin[\pi(1+\nu)]} \right] = \frac{r^\nu}{2\nu R^\nu}. \tag{30}$$

Теперь выражение для κ_2 можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \kappa_2 = -\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(2-d)2^{d-1}\Gamma(\frac{d}{2})} \iint_0^\infty r^{d-1} R^{d-1} u(r) u(R) \times \\ \times \left[r^{2-d}\Theta(r-R) + R^{2-d}\Theta(R-r) \right] dr\, dR. \end{aligned} \tag{31}$$

Асимптотика нового собственного значения задачи (7) при $0 < d < 2$ имеет вид

$$\kappa(\epsilon) = \epsilon^{\frac{1}{2-d}} \left(\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{2^{d-1}\Gamma(\frac{d}{2})} N_d \right)^{\frac{1}{2-d}} \left[1 + O(\epsilon)\right],$$

где $N_d > 0$. В пределе $d \to 1$ формулы (28) и (31) переходят в формулы (13) и (15) при $\delta \equiv 1$, если потенциал симметричен, $u(-x) = u(x)$. Чтобы доказать это утверждение, воспользуемся тождеством

$$r\Theta(r-R) + R\Theta(R-r) = \frac{1}{2}\left(|r-R| + |r+R|\right), \qquad r, R \geqslant 0.$$

В пределе $d \to 2^-$ коэффициенты κ_1, κ_2 и высших членов асимптотического разложения расходятся, так что все члены асимптотического разложения для $\kappa(\epsilon)$ становятся сравнимыми. В качестве предварительной оценки возьмем $d = 2 - \epsilon\mu$ и рассмотрим предел $\mu \to 0^+$ в выражениях (28) и (31):

$$\kappa^{\epsilon\mu} = \frac{N_2}{\mu} - \frac{N_2^2}{\mu^2} + O(\mu^{-3}, \epsilon).$$

Логарифмируя это выражение, получаем оценку предела $\mu \to 0^+$, выходящую за рамки степенного асимптотического разложения,

$$\epsilon \ln \kappa = \lim_{\mu \to 0^+} \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{N_2}{\mu} - \frac{N_2^2}{\mu^2} + \cdots \right) \approx \lim_{\mu \to 0^+} \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{N_2}{N_2 + \mu} \right) = -\frac{1}{N_2}.$$

Поскольку в случае $d = 2$ эта оценка выходит за рамки степенного разложения, мы получим асимптотику прямым методом. Для этого мы преобразуем интегральное уравнение (25) с учетом представления (26) к виду

$$\beta(k) = -\epsilon \ln \kappa K(k,0)\beta(0) - \frac{\epsilon}{2} \int_0^\infty dk' \, \ln(k' + \kappa^2) \frac{\partial}{\partial k'} \left[K(k,k')\beta(k') \right]. \tag{32}$$

Уравнение (32) удовлетворяется в ведущем порядке, если справедливо следующее асимптотическое разложение: $\ln \kappa(\epsilon) = -\epsilon^{-1}\kappa_{-1} + \kappa_0 + O(\epsilon)$, где $\kappa_{-1} > 0$. Коэффициенты κ_{-1} и κ_0 имеют вид

$$\kappa_{-1} = \frac{1}{N_2}, \tag{33}$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{N_2^2} \iint_0^\infty rRu(r)u(R)Q(r,R)\,dr\,dR, \tag{34}$$

где

$$Q(r,R) = \lim_{\kappa \to 0^+} \left[\int_0^1 \frac{k\,dk}{k^2 + \kappa^2} \left(J_0(kr)J_0(kR) - 1 \right) + \int_1^\infty \frac{k\,dk}{k^2 + \kappa^2} J_0(kr)J_0(kR) \right].$$

Используя те же вычисления, что и в (30), и формулу (8.446) из [11], получаем для κ_0 явное выражение

$$\kappa_0 = -\gamma + \ln 2 - \frac{1}{N_2^2} \iint_0^\infty rRu(r)u(R) \left[(\ln r)\Theta(r-R) + (\ln R)\Theta(R-r) \right] dr\,dR. \tag{35}$$

Эта формула, хотя и отличается по виду от формулы (35) Апенко [5], фактически ей эквивалентна. Апенко получил эту формулу с помощью предельного перехода $d \to 2^+$. Мы провели анализ уравнения (7) непосредственно при $d = 2$ и нашли ту же асимптотику нового собственного значения:

$$\kappa(\epsilon) = c \exp(-\epsilon^{-1} N^{-1}) \left[1 + O(\epsilon) \right],$$

где $c = \exp(\kappa_0)$ и $N_2 > 0$.

Наконец, упомянем тот факт, что выражения (33) и (35) допускают обобщения [5]

$$\kappa_{-1} = \frac{2\pi}{M}, \qquad M = \int_{\mathcal{R}^2} u(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}, \tag{36}$$

$$\kappa_0 = -\gamma + \ln 2 - \frac{1}{M^2} \int_{\mathcal{R}^2} \int_{\mathcal{R}^2} u(\mathbf{r})u(\mathbf{R}) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{R}| \,d\mathbf{r}\,d\mathbf{R}. \tag{37}$$

Если потенциал радиально-симметричен, $u(\mathbf{r}) = u(r)$, выражения (36) и (37) сводятся соответственно к (33) и (35) с помощью формул $M = 2\pi N_2$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(1 + a^2 - 2a\cos\theta)\,d\theta = 0, \qquad 0 \leqslant a < 1. \tag{38}$$

Последняя формула следует из теоремы о среднем значении для гармонической функции $\ln(x^2 + y^2)$ в двумерном пространстве (см. также [11, формула (4.224)]). Выражения (36) и (37) можно получить в спектральной задаче для двумерного оператора Шредингера с произвольным потенциалом $u(\mathbf{r})$ с помощью двойного разложения Фурье.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили асимптотики новых собственных значений линейных задач (2) и (7) в пределе малого потенциала. Наши результаты воспроизводят частные предельные случаи, рассмотренные в работах [3–5, 8]. Главные особенности нашего подхода следующие.

Данный метод можно использовать в линейных задачах с асимптотически постоянным потенциалом, чтобы определить, существует ли пороговое значение амплитуды потенциала, при котором появляется новое собственное значение. Порог существует, если интегральное представление решения, возникающее при использовании фурье-разложения, не имеет сингулярных членов при $\epsilon \to 0$. В противном случае порог отсутствует и асимптотический анализ позволяет находить аналитическую зависимость нового собственного значения от ϵ.

С помощью этого метода можно находить для нового собственного значения не только члены ведущего порядка, но и поправки следующего порядка, что полезно при оценке сходимости асимптотического ряда. В задачах, где новое собственное значение экспоненциально мало, наш метод позволяет находить предэкспоненциальный фактор. Наконец, с помощью интегрального представления для поправки первого порядка можно анализировать задачи, где члены ведущего порядка обращаются в нуль (см. [3]).

Благодарности. Мы признательны А. Брадни, Ф. Калоджеро, А. Фокасу и И. М. Сигалу за полезные обсуждения. Д.П. благодарит комитет НАТО за финансовую поддержку, предоставленную NSERC; К. С. благодарит NSERC за финансовую поддержку (грант OGP0046179).

Список литературы

[1] *F. Calogero, A. Degasperis.* Spectral Transform and Solitons. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982.
[2] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Курс теоретической физики. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.
[3] *B. Simon.* Ann. Phys. (N.Y.) 1976. V. 97. P. 279–288.
[4] *M. Klaus, B. Simon.* Ann. Phys. (N.Y.) 1980. V. 130. P. 251–281.
[5] *S. M. Apenko.* J. Phys. A 1998. V. 31. P. 1553–1562.

[6] *Yu. S. Kivshar, D. E. Pelinovsky, T. Cretegny, M. Peyrard.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5031–5035.
[7] *I. V. Barashenkov, D. E. Pelinovsky, E. V. Zemlyanaya.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5117–5120.
[8] *D. E. Pelinovsky, C. Sulem.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 6552–6572.
[9] *Y. Kodama, M. J. Ablowitz, J. Satsuma.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 564–576.
[10] *A. A. Minzoni, T. Miloh.* Wave Motion 1994. V. 20. P. 131–142.
[11] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971.