Письма в ЖЭТФ, том 57, вып.1, стр.25 - 29 10 января 1993 г.

НОВЫЕ МУЛЬТИСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Д.Е.Пелиновский, Ю.А.Степанянц

Институт прикладной физики РАН

603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 25 ноября 1992 г.

Обнаружен новый класс точных рациональных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили, описывающего волновые процессы в средах с положительной дисперсией. Полученные решения представляют собой локализованные в пространстве стационарные мультисолитоны, которые можно рассматривать как связанные состояния из одиночных солитонов.

1. Хорошо известно, что существует две версии уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$(u_t + uu_x - \beta u_{xxx})_x = -u_{yy}, \tag{1}$$

описывающего нелинейные волновые процессы в средах с положительной $\beta > 0$ (КП1) и отрицательной $\beta < 0$ (КП2) дисперсией. Несмотря на то, что формально обе версии полностью интегрируемы [1], до сих пор остается открытой проблема описания всех физически содержательных решений этих уравнений даже в стационарном случае. Особенно это относится к уравнению КП1, которое оказывается значительно более богатым с точки зрения описания различных физических эффектов.

Напомним, что в рамках указанного уравнения плоские солитоны неустойчивы по отношению к самофокусировке [2]; спектр малых возмущений является распадным; кроме того, оно допускает существование двумерных солитонов, локализованных в пространстве по всем направлениям [3]. Такие решения вначале были построены численно [4], а затем найдены аналитически [5]. Выяснилось, что они имеют алгебраическую структуру (выражаются через отношение двух многочленов относительно x и y и убывают на бесконечности $\sim x^{-2}$, y^{-2}), устойчивы по отношению к малым возмущениям [6], а в результате столкновения друг с другом не только не меняют своей формы, но не испытывают даже фазовых сдвигов [3,5].

Впоследствие было обнаружено (также с помощью численных расчетов [7]), что помимо одиночных солитонов уравнение КП1 обладает еще и бисолитонными решениями, которые можно рассматривать как связанные состояния из двух солитонов, стационарно движущихся друг за другом. Структура таких решений позволила сделать заключение о возможности существования и более сложных стационарных образований – мультисолитонов.

В настоящей работе найдены точные аналитические выражения, описывающие семейства мультисолитонов; показано, что они представимы в классе дробно-рациональных функций; и дана их физическая интерпретация на языке связанных состояний одиночных солитонов.

2. Будем искать стационарные решения уравнения (1) при $\beta > 0$, полагая $u(x,y,t) = u(x+Vt,y)$, где $V > 0$. Используя безразмерные переменные $\xi = x\sqrt{V/\beta}$, $\eta = yV/\sqrt{\beta}$, $v = -u/V$, запишем (1) в виде

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = v_{\xi\xi\xi\xi} + (v^2)_{\xi\xi}/2. \tag{2}$$

Используем далее замену Хироты $v = 12(\ln\varphi)_{\xi\xi}$, с помощью которой уравнение (2) приводится к билинейной форме [3,7]:

$$\varphi(\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} - \varphi_{\xi\xi\xi\xi}) = (\varphi_\xi)^2 + (\varphi_\eta)^2 + 3(\varphi_{\xi\xi})^2 - 4\varphi_\xi\varphi_{\xi\xi\xi}. \tag{3}$$

Известно, что данное уравнение имеет "N-солитонные решения" [3,7], которые удобно представить в симметричной форме:

$$\varphi_N = \sum_\sigma \prod_{i=1} \sigma_i \exp\left(\frac{\sigma_i k_i \theta_i}{2}\right) \prod \prod_{1\le i<j\le N} a_{ij}(\sigma_i, \sigma_j), \tag{4}$$

где $\theta_i = \xi + p_i\eta + \theta_i^0$, $p_i^2 = k_i^2 - 1$, $\sigma_i = \pm 1$,

$$a_{ij} = \sqrt{(p_i - p_j)^2 + 3(\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)^2}.$$

Из этой формулы путем вырождения по параметрам k_i получаются вещественные рациональные решения, которые после возвращения к переменным $v(\xi,\eta)$ представляют собой стационарные мультисолитоны. Для этого необходимо положить $N = 2M$, $p_{2n-1} = \bar{p}_{2n}$, $\theta^0_{2n-1} = \bar{\theta}^0_{2n} = \theta^0$, $n = 1,\dots,M$ и разложить $\varphi_N(\xi,\eta)$ в степенной ряд по k_i.

Воспользуемся далее следующими свойствами функции φ_N [3]:

- если $k_i = 0$ $(i = 1,\dots,N)$, то $\varphi_N(\xi,\eta,\mathrm{k}) = 0$, где $\mathrm{k} = (k_1,\dots,k_N)$;
- при $k_1 = \pm k_{i+2j}$ имеем $\varphi_N(\xi,\eta,\mathrm{k}) = 0$ $i = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,M-1$;
- $\varphi_N(\xi,\eta,\dots k_i,\dots,k_{i+2j}\dots) = -\varphi_N(\xi,\eta,\dots k_{i+2j},\dots,k_i\dots) + O(\mathrm{k}^3)$.

При указанном выборе параметров из свойств функции φ_N следует, что несколько первых членов ряда обращаются в нуль, после чего он приобретает вид

$$\prod_{i=1}^{N} k_i \prod_{j=1}^{M-K} (k_i^2 - k_{i+2j}^2)[\varphi_M(\xi,\eta) + \sum O(\mathrm{k})\psi(\xi,\eta)],$$

$K = \left[\frac{i+1}{2}\right]$, $\varphi_M(\xi,\eta)$ – некоторый многочлен, образующийся при разложении экспонент, а $\sum O(\mathrm{k})\psi(\xi,\eta)$ – остаток ряда. Степень многочлена $\varphi_M(\xi,\eta)$ легко подсчитать из следующих соображений. Сомножитель перед квадратной скобкой представляет собой однородный многочлен относительно k_i, степень которого равна $2M^2$. Он возникает при разложении в ряды матричных констант $a_{ij}(\mathrm{k})$ в формуле (4) и экспонент. При учете указанных условий $M(M-1)$ констант вида $a_{i,i+2j}$ пропорциональны $k_i \pm k_{i+2j}$, а разложение остальных матричных констант выражается формулой $a_{ij} = 2 + O(k_i^2, k_j^2)$. Поэтому степень многочлена $\varphi_M(\xi,\eta)$ определяется как $P = 2M^2 - M(M-1) = M(M+1)$.

Очевидно, что весь сомножитель перед квадратными скобками может быть опущен, ибо после логарифмирования и последующего дифференцирования по ξ (согласно замене Хироты) он обратится в нуль. Далее, осуществляя предельный переход $\mathrm{k} \to 0$, можно обратить в нуль и остаток ряда. Таким образом, многочлен $\varphi_M(\xi,\eta)$, полученный как предел точного решения (4), должен тоже удовлетворять уравнению (3).

Явный вид нескольких первых многочленов, получаемых таким путем, приведен ниже (их коэффициенты были найдены на ПЭВМ с помощью пакета "Математика").

$$\underline{M=1,\ \ P=2}: \qquad \varphi_1 = \xi^2 + \eta^2 + 3. \tag{5}$$

$$\underline{M=2,\ \ P=6}: \qquad \varphi_2 = (\xi^2+\eta^2)^3 + 25\xi^4 + 90\xi^2\eta^2 + 17\eta^4 - 125\xi^2 + 475\eta^2 + 1875. \tag{6}$$

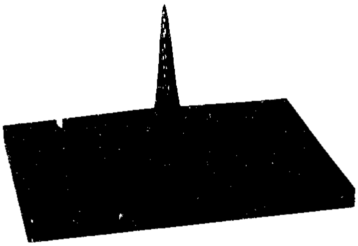
$$\begin{aligned}\underline{M=3,\ \ P=12}: \qquad \varphi_3 = {} & (\xi^2+\eta^2)^6 + 2(\xi^2+\eta^2)^3\cdot(49\xi^4 + \\ & + 198\xi^2\eta^2 + 29\eta^4) + 5\cdot(147\xi^8 + 3724\xi^6\eta^2 + 7490\xi^4\eta^4 + \\ & + 7084\xi^2\eta^6 + 867\eta^8) + \frac{140}{3}(539\xi^6 + 4725\xi^4\eta^2 - 315\xi^2\eta^4 + \\ & + 5707\eta^6) + \frac{1225}{9}\cdot(391314\xi^2 - 12705\xi^4 + 4158\xi^2\eta^2 + 40143\eta^4 + 736890\eta^2 + 717409).\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\underline{M=4,\ \ P=20}: \qquad \varphi_4 = {} & (\xi^2+\eta^2)^{10} + 30(\xi^2+\eta^2)^7\cdot(9\xi^4 + 38\xi^2\eta^2 + \\ & + 5\eta^4) + 45\cdot(\xi^2+\eta^2)^5\cdot(369\xi^6 + 4275\xi^4\eta^2 + 5315\xi^2\eta^4 + 513\eta^6) + \\ & + 5400\cdot(\xi^2+\eta^2)\cdot(65\xi^{12} + 1902\xi^{10}\eta^2 + 8577\xi^8\eta^4 + 16476\xi^6\eta^6 + \\ & + 11531\xi^4\eta^8 + 5990\xi^2\eta^{10} + 611\eta^{12}) + 3150\cdot(-5993\xi^{12} + \\ & + 34138\xi^{10}\eta^2 + 340305\xi^8\eta^4 + 1214220\xi^6\eta^6 + 846825\xi^4\eta^8 + \\ & + 213178\xi^2\eta^{10} + 114511\eta^{12} + 664846\xi^{10} + 1546350\xi^8\eta^2 + \\ & + 202020\xi^6\eta^4 + 14361060\xi^4\eta^6 + 9992910\xi^2\eta^8 + 6924974\eta^{10} - \\ & - 56538105\xi^8 - 165596340\xi^6\eta^2 + 128842350\xi^4\eta^4 + 629226780\xi^2\eta^6 + \\ & + 331232335\eta^8) + 6449625\cdot(1080248\xi^6 + 5161000\xi^4\eta^2 + \\ & + 14093560\xi^2\eta^4 + 6697992\eta^6 + 29548805\xi^4 + 134944810\xi^2\eta^2 + \\ & + 54062645\eta^4 - 107938610\xi^2 + 538716230\eta^2 + 917478185).\end{aligned} \tag{8}$$

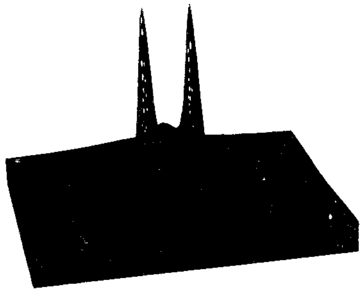
Многочлен φ_1 после перехода к исходным переменным дает одиночный солитон (рис.*а*), впервые полученный в [5]. Многочлену φ_2 соответствует двугорбое решение – бисолитон (рис.*б*), который ранее был построен численно в работе [7]. Многочлены φ_3 и φ_4 приводят к трех- и четырехгорбым мультисолитонам, соответственно (рис.*в* и *г*). Представляется очевидным, что процедуру построения более сложных мультиструктур можно продолжить и далее для $M = 5, 6, \ldots$, но формулы в высших порядках становятся все более громоздкими.

3. Построенные здесь стационарные мультиструктуры можно интерпретировать в рамках теории взаимодействия солитонов как классических частиц [8]. Из результатов этой теории вытекает, что при наличии локальных минимумов поля в структуре солитонов можно ожидать существование связанных состояний, когда солитоны располагаются в потенциальных ямах друг друга. В одномерном случае эта теория была подтверждена как численными расчетами, так и лабораторными экспериментами [8]. В двумерном случае с ее помощью

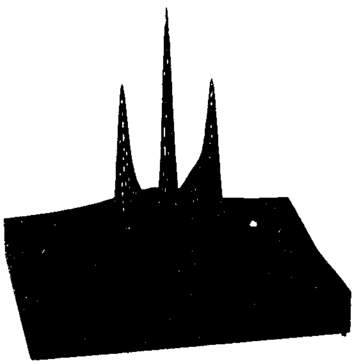
также можно получить хорошие качественные и даже количественные результаты, которые позволяют интерпретировать формально-математические выводы на физическом языке.



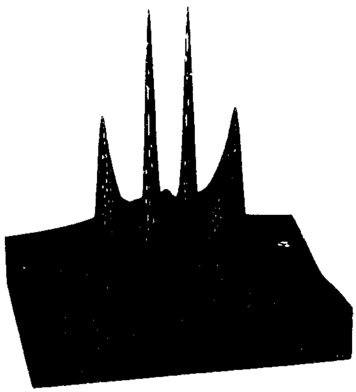
а



б



в



г

Согласно [8], солитоны можно рассматривать как точечные частицы, масса которых в направлениях x и y, вообще говоря, различна. В частности, для уравнения КП1 движение двух таких частиц описывается ньютоновскими уравнениями

$$\hat{M}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \tag{9}$$

где $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} = (x, y)$, $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{24\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} v^2(\mathbf{r}')v(\mathbf{r}' + \mathbf{r})d\mathbf{r}'$, причем в качестве $v(\mathbf{r})$ здесь берется решение уравнения (2).

Стационарным состояниям, очевидно, соответствуют экстремумы потенциальной функции $U(\mathbf{r})$. Выбирая в качестве простейшего односолитонное решение (5) и вычисляя на нем $U(\mathbf{r})$, нетрудно найти единственный локальный минимум в точке с координатами (4.28, 0). Их значения хорошо согласуются с координатами максимума бисолитона (6): (4.62, 0). Таким же путем можно построить и другие мультиструктуры, а также рассчитать и нестационарное взаимодействие мультисолитонов друг с другом.

В заключение отметим, что в работе [9] содержится досадная ошибка, которая привела к неверному заключению о невозможности существования действительных несингулярных решений уравнения КП1 в классе дробно-рациональных функций, кроме простейшего односолитонного.

Авторы благодарны В.М.Галкину и К.А.Горшкову за многочисленные плодотворные обсуждения.

1. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
2. Б.Б.Кадомцев, В.И.Петвиашвили, ДАН СССР **192**, 753 (1970).
3. М.Абловиц, Х.Сигур, Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987 (M.J.Ablowitz & H.Segur, Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia, 1987).
4. В.И.Петвиашвили, Физика плазмы **2**, 469 (1976).
5. S.V.Manakov, V.E.Zakharov, L.A.Bordag, et al., Phys. Lett. **A 63**, 205 (1977).
6. Е.А.Кузнецов, С.К.Турицын, ЖЭТФ **82**, 1457 (1982).
7. Л.А.Абрамян, Ю.А.Степанянц, Изв. ВУЗов. Радиофизика **28**, 27 (1985).
8. К.А.Горшков, Л.А.Островский, В.В.Папко, ЖЭТФ **71**, 585 (1976).
9. V.M.Galkin and Yu.A.Stepanyants, Phys. Lett. **A 167**, 172 (1992).